全国各类成人高等学校招生考试

真题汇编及全真模拟

高等数学（二）

本书编写组　编

专科起点
升本科

中国言实出版社

目录

CONTENTS

历年真题汇编

全真模拟试卷

考前专家押题

参考答案解析

增值服务

前　　言

竞争日趋激烈的现代社会，知识成为制胜的重要筹码，莘莘学子深感提升自身素质、增加知识储备的重要性，纷纷踏上开启象牙宝塔大门的梦想之路，而成人高考则为寻梦者提供了一把宝贵的金钥匙。为帮助参加全国成人高考的考生更好地学习备考，顺利通过考试，我们特组织编写了这套《全国各类成人高等学校招生考试真题汇编及全真模拟》。

本套试卷具有以下特点：

第一考纲　本套试卷严格根据最新考试大纲编写。全真模拟试题题型、题量、分值及难易程度均与考纲要求和最新历年真题保持高度一致，考点全面，答案准确，内容与成考第一信息并行考试前沿。

汇编历年　国家教育部每年所命的考题都是经过专家仔细论证、推敲出来的，并能精确地反映当年的命题标准、方向，如果把几年的考题汇总在一起研练就能更准确地把握真题规律，将考试掌控于心。本套试卷将最新历年真题汇编整理，并对历年真题进行了细致的剖析，相信考生在历年真题的帮助下，能够有所受益。

名家编写　参编人员均是副教授以上职称的高校一线教师。其中有30多年教学经验的教授，有北京大学、中国人民大学、北京师范大学博士毕业的教授、副教授，他们精研学科内容，对成考规律能准确地把握。

全面剖析　根据成人高考考生学习的特点，在编写本套试卷时，内容上多角度、全方位地对大部分习题进行了详尽的点拨，有利于帮助考生掌握考点，攻破难点。举一反三式的编写模式使考生在学习过程中对知识能达到深刻的理解和记忆，考生复习起来犹如课堂学习，身临其境，从而全面高效地帮助考生通过考试。

本套试卷的编写融入了高校一线教师对成人高考教育的经验精华，同时也倾注了他们的汗水和心血。在此，我们向他们表示衷心的感谢！

由于编写时间仓促，不足之处在所难免，在此就教大方，敬请斧正。

如有与本书相关的问题或建议，欢迎您致电4006597013，我们将以更加优质、快捷的方式为您提供全方位、多层次的服务。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 2 / 本书编写组编. —北京：中国言实出版社，2012.1(2017.1重印)
(全国各类成人高等学校招生考试真题汇编及全真模拟)
专科起点升本科
ISBN 978-7-80250-754-8

Ⅰ.①高…　Ⅱ.①高…　Ⅲ.①高等数学—成人高等教育—习题集—升学参考资料　Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第002061号

责任编辑：邓见柏
责任校对：李　琳
封面设计：天　一

出版发行　中国言实出版社
地　址：北京市朝阳区北苑路180号加利大厦5号楼105室
邮　编：100101
编辑部：北京市海淀区北太平庄路甲1号
邮　编：100088
电　话：64924853(总编室)　64924716(发行部)
网　址：www.zgyscbs.cn
E-mail：zgyscbs@263.net
经　销　新华书店
印　刷　郑州宏达印务有限公司
版　次　2012年1月第1版　2017年1月第6次印刷
规　格　787毫米×1092毫米　1/16　61.5印张
字　数　1574千字
定　价　180.00元(全9册)　ISBN 978-7-80250-754-8

考生诚信考试承诺

"我已阅读成人高考考生(考场)有关规定,愿意在本场考试中自觉遵守。如有违反将接受处理。我保证本场考试中,本人所提供的个人信息是真实、准确的,并愿意承担相应的法律责任。

姓名______ 考号______ 科类______

密 封 线 内 不 要 答 题

天一文化

天道酬勤 一心为您

绝密★启用前

2016年成人高等学校招生全国统一考试专升本

高等数学(二)

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分,满分150分,考试时间120分钟.

题 号	一	二	三	总 分	统分人签字
分 数					

第Ⅰ卷(选择题,共40分)

得 分	评卷人

一、选择题(1~10小题,每小题4分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-5x+2}{x^2-2}=$ 【 】

A. 0　B. 1　C. 2　D. 3

2. 设函数 $f(x)=\begin{cases}e^x, & x<0,\\ x+a, & x\geqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续,则 $a=$ 【 】

A. -1　B. 0　C. 1　D. 2

3. 设函数 $y=2+\sin x$,则 $y'=$ 【 】

A. $\cos x$　B. $-\cos x$　C. $2+\cos x$　D. $2-\cos x$

4. 设函数 $y=e^{x-1}+1$ 则 $dy=$ 【 】

A. $e^x dx$　B. $e^{x-1}dx$　C. $(e^x+1)dx$　D. $(e^{x-1}+1)dx$

5. $\int_0^1(5x^4+2)dx=$ 【 】

A. 1　B. 3　C. 5　D. 7

6. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)dx=$ 【 】

A. $\frac{\pi}{2}+1$　B. $\frac{\pi}{2}$　C. $\frac{\pi}{2}-1$　D. 1

7. 设函数 $y=x^4+2x^2+3$,则 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=$ 【 】

A. $4x^3+4x$　B. $4x^3+4$

C. $12x^2+4x$　D. $12x^2+4$

8. $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x^2}dx=$ 【 】

A. -1　B. 0　C. 1　D. 2

9. 设函数 $z=x^2+y$,则 $dz=$ 【 】

A. $2xdx+dy$　B. x^2dx+dy

C. $x^2dx+ydy$　D. $2xdx+ydy$

10. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{x}=2$,则 $a=$ 【 】

A. $\frac{1}{2}$　B. 1　C. $\frac{3}{2}$　D. 2

第Ⅱ卷(非选择题,共110分)

得 分	评卷人

二、填空题(11~20小题,每小题4分,共40分)

11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-1}{2x^2+3}=$ ______.

12. 设函数 $y=x^2-e^x$,则 $y'=$ ______.

13. 设事件 A 发生的概率为0.7,则 A 的对立事件 $\overline{A}$ 发生的概率为______.

14. 曲线 $y=\ln x$ 在点(1,0)处的切线方程为______.

15. $\int\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{1+x^2}\right)dx=$ ______.

16. $\int_{-1}^{1}(\sin x+x)dx=$ ______.

17. 设函数 $F(x)=\int_0^x\cos t\,dt$,则 $F'(x)=$ ______.

18. 设函数 $z=\sin(x+2y)$,则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=$ ______.

19. 已知点(1,1)是曲线 $y=x^2+a\ln x$ 的拐点,则 $a=$ ______.

20. 设 $y=y(x)$ 是由方程 $y=x-e^y$ 所确定的隐函数,则 $\dfrac{dy}{dx}=$ ______.

得　分	评卷人

三、解答题(21 ～ 28 题，共 70 分. 解答应写出推理、演算步骤)

21.(本题满分 8 分)

计算 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x-1}$.

22.(本题满分 8 分)

设函数 $y=xe^{2x}$，求 y'.

23.(本题满分 8 分)

设函数 $z=x^3y+xy^3$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

24.(本题满分 8 分)

计算 $\int x\cos x^2\,\mathrm{d}x$.

★★★★密封线内不要答题★★★★

★

★

★

★

密

封

线

内

不

要

答

题

★

★

★

★

25.(本题满分 8 分)

计算$\int_1^{\sqrt{e}} 2x\ln x\mathrm{d}x$.

26.(本题满分 10 分)

求曲线 $y=\sqrt{x}$,直线 $x=1$ 和 x 轴所围成的有界平面图形的面积 S,及该平面图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积 V.

27.(本题满分 10 分)

设函数 $f(x,y)=x^2+y^2+xy+3$,求 $f(x,y)$ 的极值点与极值.

28.(本题满分 10 分)

已知离散型随机变量 X 的概率分布为

X	0	10	20	30
P	0.2	a	0.2	0.3

(1) 求常数 a;

(2) 求 X 的数学期望 EX 及方差 DX.

参考答案及解析

一、选择题

1.【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了极限的知识点.

【应试指导】 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-5x+2}{x^2-2}=\dfrac{1-5+2}{1-2}=2.$

2.【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了分段函数在一点连续的知识点.

【应试指导】 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(x+a)=a$,因为函数$f(x)$在$x=0$处连续,故$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=1$,即$a=1$.

3.【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了导数的知识点.

【应试指导】 因为$y=2+\sin x$,所以$y'=\cos x$.

4.【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了一元函数的微分的知识点.

【应试指导】 因为$y=e^{x-1}+1$,$y'=e^{x-1}$,则$dy=e^{x-1}dx$.

5.【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了定积分的知识点.

【应试指导】 $\int_0^1(5x^4+2)dx=\int_0^1 5x^4dx+\int_0^1 2dx=x^5\Big|_0^1+2x\Big|_0^1=1+2=3.$

6.【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了定积分的知识点.

【应试指导】 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx=x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\dfrac{\pi}{2}+1.$

7.【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了一元函数的高阶导数的知识点.

【应试指导】 因为$y=x^4+2x^2+3$,故$\dfrac{dy}{dx}=4x^3+4x$,$\dfrac{d^2y}{dx^2}=12x^2+4$.

8.【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了反常积分的知识点.

【应试指导】 $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x^2}dx=\lim\limits_{a\to+\infty}\int_1^a\dfrac{1}{x^2}dx=\lim\limits_{a\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{x}\Big|_1^a\right)=\lim\limits_{a\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{a}\right)=1.$

9.【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了二元函数的全微分的知识点.

【应试指导】 因为$\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x$,$\dfrac{\partial z}{\partial y}=1$,

故 $dz=\dfrac{\partial z}{\partial x}dx+\dfrac{\partial z}{\partial y}dy=2xdx+dy.$

10.【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了特殊极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$的应用的知识点.

【应试指导】 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin ax}{x}=a\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin ax}{ax}=a=2.$

二、填空题

11.【答案】 $-\dfrac{1}{3}$

【考情点拨】 本题考查了极限的知识点.

【应试指导】 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-1}{2x^2+3}=-\dfrac{1}{3}.$

12.【答案】 $2x-e^x$

【考情点拨】 本题考查了一阶导数的知识点.

【应试指导】 因为$y=x^2-e^x$,故$y'=2x-e^x$.

13.【答案】 0.3

【考情点拨】 本题考查了对立事件的概率的知识点.

【应试指导】 $P(\overline{A})=1-P(A)=1-0.7=0.3.$

14.【答案】 $y=x-1$

【考情点拨】 本题考查了切线方程的知识点.

【应试指导】 因为$y=\ln x$,$y'=\dfrac{1}{x}$,$y'\Big|_{x=1}=1$,所以曲线$y=\ln x$在点$(1,0)$处的切线方程为$y=x-1$.

15.【答案】 $\ln|x|+\arctan x+C$

【考情点拨】 本题考查了不定积分的知识点.

【应试指导】 $\int\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{1+x^2}\right)dx=\int\dfrac{1}{x}dx+\int\dfrac{1}{1+x^2}dx=\ln|x|+\arctan x+C.$

16.【答案】 0

【考情点拨】 本题考查了定积分的知识点.

【应试指导】 $\int_{-1}^1(\sin x+x)dx=\int_{-1}^1\sin xdx+\int_{-1}^1 xdx=-\cos x\Big|_{-1}^1+\dfrac{1}{2}x^2\Big|_{-1}^1=0.$

17.【答案】 $\cos x$

【考情点拨】 本题考查了变上限积分求导的知识点.

【应试指导】 因为$F(x)=\int_0^x\cos tdt$,则$F'(x)=\dfrac{d}{dx}\int_0^x\cos tdt=\cos x$.

18.【答案】 $\cos(x+2y)$

【考情点拨】 本题考查了二元函数的偏导数的知识点.

【应试指导】 因为$z=\sin(x+2y)$,

则$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\cos(x+2y)$.

19.【答案】 2

【考情点拨】 本题考查了拐点的知识点.

【应试指导】 因为$(1,1)$是曲线的拐点,$f'(x)=2x+\dfrac{a}{x}$,$f''(x)=2-\dfrac{a}{x^2}$,则$f''(1)=0$,$2-a=0$,$a=2$.

20.【答案】 $\dfrac{1}{1+e^y}$

【考情点拨】 本题考查了隐函数的导数的知识点.

【应试指导】 因为$y=x-e^y$,$y'=1-e^y\cdot y'$,即$(1+e^y)y'=1$,$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{1+e^y}$.

三、解答题

21. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+x-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x+1}{1}$ (6分)

$=3.$ (8分)

22. $y'=x'e^{2x}+x(e^{2x})'$ (4分)

$=(1+2x)e^{2x}.$ (8分)

23. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=3x^2y+y^3$, (2分)

$\dfrac{\partial^2z}{\partial x^2}=6xy$, (5分)

$\dfrac{\partial^2z}{\partial x\partial y}=3x^2+3y^2.$ (8分)

24. $\int x\cos x^2dx=\dfrac{1}{2}\int\cos x^2dx^2$ (4分)

$=\dfrac{1}{2}\sin x^2+C.$ (8分)

25. $\int_1^{\sqrt{e}}2x\ln xdx=\int_1^{\sqrt{e}}\ln xdx^2$ (4分)

$=x^2\ln x\Big|_1^{\sqrt{e}}-\int_1^{\sqrt{e}}x^2\cdot\dfrac{1}{x}dx$ (6分)

$=\dfrac{e}{2}-\dfrac{x^2}{2}\Big|_1^{\sqrt{e}}$

$=\dfrac{1}{2}.$ (8分)

26. 面积 $S=\int_0^1\sqrt{x}dx$ (2分)

$=\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1$

$=\dfrac{2}{3}.$ (5分)

旋转体的体积 $V=\int_0^1\pi(\sqrt{x})^2dx$ (7分)

$=\int_0^1\pi xdx$

$=\dfrac{\pi}{2}x^2\Big|_0^1$

$=\dfrac{\pi}{2}.$ (10分)

27. 由已知,$\dfrac{\partial f}{\partial x}=2x+y$,$\dfrac{\partial f}{\partial y}=2y+x$.

令$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=0,\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=0,\end{cases}$ 得驻点$(0,0)$. (4分)

$f(x,y)$的2阶偏导数为

$\dfrac{\partial^2f}{\partial x^2}=2$,$\dfrac{\partial^2f}{\partial x\partial y}=1$,$\dfrac{\partial^2f}{\partial y^2}=2$. (6分)

故 $A=\dfrac{\partial^2f}{\partial x^2}\Big|_{(0,0)}=2$,$B=\dfrac{\partial^2f}{\partial x\partial y}\Big|_{(0,0)}=1$,$C=\dfrac{\partial^2f}{\partial y^2}\Big|_{(0,0)}=2$.

因为$A>0$且$AC-B^2>0$所以$(0,0)$为$f(x,y)$的极小值点,极小值为$f(0,0)=3$. (10分)

28. (1) 因为$0.2+a+0.2+0.3=1$,所以$a=0.3$. (4分)

(2) $EX=0\times0.2+10\times0.3+20\times0.2+30\times0.3=16$, (7分)

$DX=(0-16)^2\times0.2+(10-16)^2\times0.3+(20-16)^2\times0.2+(30-16)^2\times0.3$

$=124.$ (10分)

考生诚信
考试承诺

“我已阅读成人高考考生(考场)有关规定，愿意在本场考试中自觉遵守。如有违反将接受处理。我保证本场考试中，本人所提供的个人信息是真实、准确的，并愿意承担相应的法律责任。”

密　封　线　内　不　要　答　题

科类________ 考号________ 姓名________

天一文化 TIANYI CULTURE

天道酬勤
一心为您

绝密★启用前

天一文化 TIANYI CULTURE

2015 年成人高等学校招生全国统一考试专升本

高等数学(二)

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分，满分 150 分，考试时间 120 分钟。

题　号	一	二	三	总　分	统分人签字
分　数					

第Ⅰ卷(选择题，共 40 分)

得　分	评卷人

一、选择题(1～10 小题，每小题 4 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的)

1. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{x^2+1}=$ 【　】

A. 0　B. $\dfrac{1}{2}$　C. 1　D. 2

2. 当 $x\to 0$ 时，$\sin 3x$ 是 $2x$ 的 【　】

A. 低阶无穷小量　B. 等价无穷小量

C. 同阶但不等价无穷小量　D. 高阶无穷小量

3. 函数 $f(x)=\begin{cases}x+1, x<0,\\ x^2, \quad x\geqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处 【　】

A. 有定义且有极限　B. 有定义但无极限

C. 无定义但有极限　D. 无定义且无极限

4. 设函数 $f(x)=x\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$，则 $f'(x)=$ 【　】

A. $(1+x)\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$　B. $\left(\dfrac{1}{2}+x\right)\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$　C. $\left(1+\dfrac{x}{2}\right)\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$　D. $(1+2x)\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$

5. 下列区间为函数 $f(x)=x^4-4x$ 的单调增区间的是 【　】

A. $(-\infty,+\infty)$　B. $(-\infty,0)$　C. $(-1,1)$　D. $(1,+\infty)$

6. 已知函数 $f(x)$ 在区间 $[-3,3]$ 上连续，则 $\int_{-1}^{1}f(3x)\mathrm{d}x=$ 【　】

A. 0　B. $\dfrac{1}{3}\int_{-3}^{3}f(t)\mathrm{d}t$　C. $\dfrac{1}{3}\int_{-1}^{1}f(t)\mathrm{d}t$　D. $3\int_{-3}^{3}f(t)\mathrm{d}t$

7. $\int(x^{-2}+\sin x)\mathrm{d}x=$ 【　】

A. $-2x^{-1}+\cos x+C$　B. $-2x^{-3}+\cos x+C$

C. $-\dfrac{x^{-3}}{3}-\cos x+C$　D. $-x^{-1}-\cos x+C$

8. 设函数 $f(x)=\int_0^x(t-1)\mathrm{d}t$，则 $f''(x)=$ 【　】

A. -1　B. 0　C. 1　D. 2

9. 设二元函数 $z=x^y$，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=$ 【　】

A. yx^{y-1}　B. yx^{y+1}　C. $x^y\ln x$　D. x^y

10. 设二元函数 $z=\cos(xy)$，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=$ 【　】

A. $y^2\sin(xy)$　B. $y^2\cos(xy)$

C. $-y^2\sin(xy)$　D. $-y^2\cos(xy)$

第Ⅱ卷(非选择题，共 110 分)

得　分	评卷人

二、填空题(11～20 小题，每小题 4 分，共 40 分)

11. $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=$ ________.

12. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^{\frac{x}{3}}=$ ________.

13. 设函数 $y=\ln(4x-x^2)$，则 $y'(1)=$ ________.

14. 设函数 $y=x+\sin x$，则 $\mathrm{d}y=$ ________.

15. 设函数 $y=x^{\frac{3}{2}}+\mathrm{e}^{-x}$，则 $y''=$ ________.

16. 若 $\int f(x)\mathrm{d}x=\cos(\ln x)+C$，则 $f(x)=$ ________.

17. $\int_{-1}^{1}x|x|\mathrm{d}x=$ ________.

18. $\int\mathrm{d}(x\ln x)=$ ________.

19. 由曲线 $y=x^2$，直线 $x=1$ 及 x 轴所围成的平面有界图形的面积 $S=$ ________.

20. 设二元函数 $z=\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}$，则 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,1)}=$ ________.

得　分	评卷人

三、解答题(21～28题,共70分.解答应写出推理、演算步骤)

21.(本题满分8分)

计算$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{e^x-e}{\ln x}$.

22.(本题满分8分)

设函数$y=\cos(x^2+1)$,求y'.

23.(本题满分8分)

计算$\int\dfrac{x}{4+x^2}dx$.

24.(本题满分8分)

计算$\int_0^4 f(x)dx$,其中$f(x)=\begin{cases}x, & x<1,\\ \dfrac{1}{1+x}, & x\geqslant1.\end{cases}$

★★★★密封线内不要答题★★★★

★

★

★

★

密

封

线

内

不

要

答

题

★

★

★

★

25.(本题满分 8 分)

已知 $f(x)$ 是连续函数,且$\int_0^x f(t)e^{-t}dt = x$,求$\int_0^1 f(x)dx$.

26.(本题满分 10 分)

已知函数 $f(x) = \ln x - x$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间和极值;

(2) 判断曲线 $y = f(x)$ 的凹凸性.

27.(本题满分 10 分)

求二元函数 $f(x,y) = \frac{x^2}{2} - xy + y^2 + 3x$ 的极值.

28.(本题满分 10 分)

从装有 2 个白球,3 个黑球的袋中任取 3 个球,记取出白球的个数为 X.

(1) 求 X 的概率分布;

(2) 求 X 的数学期望 $E(X)$.

参考答案及解析

一、选择题

1.【答案】A

【考情点拨】本题考查了极限的计算的知识点.

【应试指导】$\lim\limits_{x\to-1}\frac{x+1}{x^2+1}=\frac{-1+1}{(-1)^2+1}=0.$

2.【答案】C

【考情点拨】本题考查了无穷小量的比较的知识点.

【应试指导】$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin3x}{2x}=\frac{3}{2}\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin3x}{3x}=\frac{3}{2}$，故 $\sin 3x$ 是 $2x$ 的同阶但不等价无穷小量.

3.【答案】B

【考情点拨】本题考查了分段函数的极限的知识点.

【应试指导】当 $x\geqslant0$ 时，$f(x)=x^2$，故 $f(0)=0$，即 $f(x)$ 在 $x=0$ 处有定义. $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(x+1)=1$，$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}x^2=0$，$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$，故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处无极限.

4.【答案】C

【考情点拨】本题考查了导数的四则运算法则的知识点.

【应试指导】因 $f(x)=xe^{\frac{x}{2}}$，则 $f'(x)=e^{\frac{x}{2}}+\frac{1}{2}\cdot xe^{\frac{x}{2}}=\left(1+\frac{x}{2}\right)e^{\frac{x}{2}}$.

5.【答案】D

【考情点拨】本题考查了函数的单调性的知识点.

【应试指导】$f(x)=x^4-4x$，则 $f'(x)=4x^3-4=4(x^3-1)$，令 $f'(x)=0$，得 $x=1$. 当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$，故 $f(x)$ 的单调增区间为 $(1,+\infty)$.

6.【答案】B

【考情点拨】本题考查了定积分的换元积分法的知识点.

【应试指导】令 $t=3x$，则 $\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\mathrm{d}t$，$t\in[-3,3]$，故 $\int_{-1}^{1}f(3x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int_{-3}^{3}f(t)\mathrm{d}t$.

7.【答案】D

【考情点拨】本题考查了不定积分的计算的知识点.

【应试指导】$\int(x^{-2}+\sin x)\mathrm{d}x=\int x^{-2}\mathrm{d}x+\int\sin x\mathrm{d}x=-x^{-1}-\cos x+C$（$C$ 为任意常数）.

8.【答案】C

【考情点拨】本题考查了变上限积分的性质的知识点.

【应试指导】$f(x)=\int_0^x(t-1)\mathrm{d}t$，则 $f'(x)=x-1$，故 $f''(x)=1$.

9.【答案】A

【考情点拨】本题考查了一阶偏导数的知识点.

【应试指导】$z=x^y$，则 $\frac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1}$.

10.【答案】D

【考情点拨】本题考查了高阶偏导数的知识点.

【应试指导】$z=\cos(xy)$，则 $\frac{\partial z}{\partial x}=-y\sin(xy)$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-y^2\cos(xy)$.

二、填空题

11.【答案】0

【考情点拨】本题考查了极限的计算的知识点.

【应试指导】当 $x\to0$ 时，x 是无穷小量，$\left|\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant1$，故 $\lim\limits_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}=0$.

12.【答案】$e^{-\frac{2}{3}}$

【考情点拨】本题考查了重要极限的应用的知识点.

【应试指导】

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{3}}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1-\frac{2}{x}\right)^{-\frac{x}{2}}\right]^{\left(-\frac{2}{3}\right)}=e^{-\frac{2}{3}}.$$

13.【答案】$\frac{2}{3}$

【考情点拨】本题考查了复合函数的导数的知识点.

【应试指导】$y=\ln(4x-x^2)$，则 $y'=\frac{4-2x}{4x-x^2}$，故 $y'(1)=\frac{2}{3}$.

14.【答案】$(1+\cos x)\mathrm{d}x$

【考情点拨】本题考查了微分的知识点.

【应试指导】$y=x+\sin x$，$y'=1+\cos x$，故 $\mathrm{d}y=(1+\cos x)\mathrm{d}x$.

15.【答案】$\frac{3}{4}x^{-\frac{1}{2}}+e^{-x}$

【考情点拨】本题考查了高阶导数的知识点.

【应试指导】$y=x^{\frac{3}{2}}+e^{-x}$，则 $y'=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}-e^{-x}$，故 $y''=\frac{3}{4}x^{-\frac{1}{2}}+e^{-x}$.

16.【答案】$-\frac{\sin(\ln x)}{x}$

【考情点拨】本题考查了不定积分的知识点.

【应试指导】$f(x)=[\cos(\ln x)+C]'=-\frac{1}{x}\sin(\ln x)$.

17.【答案】0

【考情点拨】本题考查了定积分的性质的知识点.

【应试指导】因为函数 $f(x)=x|x|$ 在 $[-1,1]$ 上是连续的奇函数，故 $\int_{-1}^{1}x|x|\mathrm{d}x=0$.

18.【答案】$x\ln x+C$

【考情点拨】本题考查了不定积分的性质的知识点.

【应试指导】$\int\mathrm{d}(x\ln x)=x\ln x+C$（$C$ 为任意常数）.

19.【答案】$\frac{1}{3}$

【考情点拨】本题考查了定积分的应用的知识点.

【应试指导】由题意得，$S=\int_0^1x^2\mathrm{d}x=\left.\frac{1}{3}x^3\right|_0^1=\frac{1}{3}$.

20.【答案】$-e$

【考情点拨】本题考查了偏导数的知识点.

【应试指导】$z=e^{\frac{y}{x}}$，则 $\frac{\partial z}{\partial x}=\left(-\frac{y}{x^2}\right)e^{\frac{y}{x}}=-\frac{y}{x^2}e^{\frac{y}{x}}$，故 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,1)}=-e$.

三、解答题

21. $\lim\limits_{x\to1}\frac{e^x-e}{\ln x}=\lim\limits_{x\to1}\frac{e^x}{\frac{1}{x}}$ （6分）

$=e.$ （8分）

22. $y'=[\cos(x^2+1)]'$

$=-\sin(x^2+1)\cdot(x^2+1)'$ （6分）

$=-2x\sin(x^2+1).$ （8分）

23. $\int\frac{x}{4+x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{1}{4+x^2}\mathrm{d}(4+x^2)$ （4分）

$=\frac{1}{2}\ln(4+x^2)+C.$ （8分）

24. $\int_0^4f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1x\mathrm{d}x+\int_1^4\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x$ （3分）

$=\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1+\left.\ln(1+x)\right|_1^4$

$=\frac{1}{2}+\ln\frac{5}{2}.$ （8分）

25. 等式两边对 x 求导，得

$f(x)e^{-x}=1$， （4分）

$f(x)=e^x$.

$\int_0^1f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1e^x\mathrm{d}x$

$=\left.e^x\right|_0^1$

$=e-1.$ （8分）

26. (1) $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=\frac{1}{x}-1$.

令 $f'(x)=0$ 得驻点 $x=1$.

当 $0<x<1$ 时，$f'(x)>0$；当 $x>1$ 时，$f'(x)<0$.

$f(x)$ 的单调增区间是 $(0,1)$，单调减区间是 $(1,+\infty)$.

$f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值 $f(1)=-1$. （7分）

(2) 因为 $f''(x)=-\frac{1}{x^2}<0$，所以曲线 $y=f(x)$ 是凸的. （10分）

27. $f'_x=x-y+3$，$f'_y=-x+2y$.

由 $\begin{cases}x-y+3=0,\\-x+2y=0\end{cases}$ 解得 $x=-6$，$y=-3$. （5分）

$f''_{xx}(x,y)=1$，$f''_{xy}(x,y)=-1$，$f''_{yy}(x,y)=2$.

$A=f''_{xx}(-6,-3)=1$，$B=f''_{xy}(-6,-3)=-1$，$C=f''_{yy}(-6,-3)=2$.

$B^2-AC=-1<0$，$A>0$，

故 $f(x,y)$ 在点 $(-6,-3)$ 处取得极小值，极小值为 $f(-6,-3)=-9$. （10分）

28. (1) X 可能的取值为 0，1，2. （2分）

$P\{X=0\}=\frac{C_2^0\cdot C_3^2}{C_5^2}=0.1$，

$P\{X=1\}=\frac{C_2^1\cdot C_3^1}{C_5^2}=0.6$，

$P\{X=2\}=\frac{C_2^2\cdot C_3^0}{C_5^2}=0.3$，

因此 X 的概率分布为

X	0	1	2
P	0.1	0.6	0.3

（7分）

(2) $E(X)=0\times0.1+1\times0.6+2\times0.3=1.2.$ （10分）

考生诚信考试承诺

“我已阅读成人高考考生(考场)有关规定，愿意在本场考试中自觉遵守。如有违反将接受处理，我保证本场考试中，本人所提供的个人信息是真实、准确的，并愿意承担相应的法律责任。”

密 封 线 内 不 要 答 题

姓名________ 考号________ 科类________

天道酬勤 一心为您

绝密★启用前

2014年成人高等学校招生全国统一考试专升本

高等数学(二)

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分，满分150分，考试时间120分钟。

题　号	一	二	三	总　分	统分人签字
分　数					

第Ⅰ卷(选择题，共40分)

得　分	评卷人

一、选择题(1～10小题，每小题4分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的)

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{x^2}=$ 【　】

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. ∞

2. 设函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，且 $f'(1)=2$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-x)-f(1)}{x}=$ 【　】

A. -2　　B. $-\dfrac{1}{2}$　　C. $\dfrac{1}{2}$　　D. 2

3. $\mathrm{d}(\sin 2x)=$ 【　】

A. $2\cos 2x\mathrm{d}x$　　B. $\cos 2x\mathrm{d}x$　　C. $-2\cos 2x\mathrm{d}x$　　D. $-\cos 2x\mathrm{d}x$

4. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 连续且不恒为零，则下列各式中不恒为常数的是 【　】

A. $f(b)-f(a)$　　B. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$　　C. $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$　　D. $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$

5. 设 $f(x)$ 为连续函数，且 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=x^3+\ln(x+1)$，则 $f(x)=$ 【　】

A. $3x^2+\dfrac{1}{x+1}$　　B. $x^3+\dfrac{1}{x+1}$　　C. $3x^2$　　D. $\dfrac{1}{x+1}$

6. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 连续，且 $I(u)=\int_a^u f(x)\mathrm{d}x-\int_a^u f(t)\mathrm{d}t$，$a<u<b$，则 $I(u)$ 【　】

A. 恒大于零　　B. 恒小于零　　C. 恒等于零　　D. 可正，可负

7. 设二元函数 $z=x^y$，则 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ 【　】

A. x^y　　B. $x^y\ln y$　　C. $x^y\ln x$　　D. yx^{y-1}

8. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 连续，则曲线 $y=f(x)$ 与直线 $x=a$，$x=b$ 及 x 轴所围成的平面图形的面积为 【　】

A. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$　　B. $-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$　　C. $\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$　　D. $\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|$

9. 设二元函数 $z=x\cos y$，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$ 【　】

A. $x\sin y$　　B. $-x\sin y$　　C. $\sin y$　　D. $-\sin y$

10. 设事件 A，B 相互独立，A，B 发生的概率分别为 0.6，0.9，则 A，B 都不发生的概率为 【　】

A. 0.54　　B. 0.04　　C. 0.1　　D. 0.4

第Ⅱ卷(非选择题，共110分)

得　分	评卷人

二、填空题(11～20小题，每小题4分，共40分)

11. 函数 $f(x)=\dfrac{2}{x-1}$ 的间断点为 $x=$________.

12. 设函数 $f(x)=\begin{cases}e^{3x}-1, & x\geqslant 0,\\ a, & x<0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$________.

13. 设 $y=\sin(2x+1)$，则 $y''=$________.

14. 函数 $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ 的单调增区间为________.

15. 曲线 $y=e^x+x^2$ 在点 $(0,1)$ 处的切线斜率为________.

16. 设 $f'(x)$ 为连续函数，则 $\int f'(x)\mathrm{d}x=$________.

17. $\int_{-1}^{1}(x^3\cos x+1)\mathrm{d}x=$________.

18. $\int_0^1(2x-1)^5\mathrm{d}x=$________.

19. 设二元函数 $z=e^{\frac{1}{x+y}}$，则 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=$________.

20. 设二元函数 $z=x^3y^2$，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$________.

得 分	评卷人

三、解答题(21 ～ 28 题,共 70 分.解答应写出推理、演算步骤)

21.(本题满分 8 分)

计算$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-2e^{x}+1}{x^{2}}$.

22.(本题满分 8 分)

已知 $x=-1$ 是函数 $f(x)=ax^{3}+bx^{2}$ 的驻点,且曲线 $y=f(x)$ 过点(1,5),求 a,b 的值.

23.(本题满分 8 分)

计算$\int\frac{x^{3}}{x-1}dx$.

24.(本题满分 8 分)

计算$\int_{1}^{e}\ln x dx$.

★ ★ ★ ★ 密 封 线 内 不 要 答 题 ★ ★ ★ ★

★ ★ ★ ★ 密 封 线 内 不 要 答 题 ★ ★ ★ ★

25.(本题满分 8 分)

设 $y=y(x)$ 是由方程 $e^y+xy=1$ 所确定的隐函数,求$\frac{dy}{dx}$.

26.(本题满分 10 分)

设曲线 $y=\sin x(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2})$,$x$ 轴及直线 $x=\frac{\pi}{2}$ 所围成的平面图形为 D.在区间$(0,\frac{\pi}{2})$内求一点 x_0,使直线 $x=x_0$ 将 D 分为面积相等的两部分.

27.(本题满分 10 分)

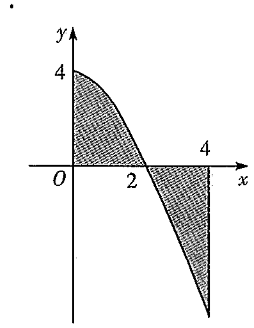
设 50 件产品中,45 件是正品,5 件是次品.从中任取 3 件,求其中至少有 1 件是次品的概率.(精确到 0.01)

28.(本题满分 10 分)

设曲线 $y=4-x^2(x\geqslant0)$ 与 x 轴,y 轴及直线 $x=4$ 所围成的平面图形为 D.(如图中阴影部分所示).

(1) 求 D 的面积 S.

(2) 求图中 x 轴上方的阴影部分绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积 V.



参考答案及解析

一、选择题

1.【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了特殊极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ 的知识点.

【应试指导】 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}(\frac{\sin x}{x})^2=1$.

2.【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了利用导数定义求极限的知识点.

【应试指导】 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(1-x)-f(1)}{x}$

$=-\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(1-x)-f(1)}{1-x-1}$

$=-f'(1)=-2$.

3.【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了一元函数的微分的知识点.

【应试指导】 设 $y=\sin 2x$，则 $y'=2\cos 2x$，故 $\mathrm{d}(\sin 2x)=2\cos 2x\mathrm{d}x$.

4.【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了导数的性质的知识点.

【应试指导】 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的原函数为 $F(x)$. A 项，$[f(b)-f(a)]'=0$；B 项，$[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x]'=[F(b)-F(a)]'=0$；C 项，$[\lim\limits_{x\to a^+}f(x)]'=[f(a)]'=0$；D 项，$[\int_a^x f(t)\mathrm{d}t]'=f(x)$. 故 A、B、C 项恒为常数，D 项不恒为常数.

5.【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了变上限定积分的导数的知识点.

【应试指导】 $f(x)=[\int_0^x f(t)\mathrm{d}t]'=[x^3+\ln(x+1)]'=3x^2+\frac{1}{x+1}$.

6.【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了定积分的性质的知识点.

【应试指导】 因定积分与积分变量所用字母无关，故 $I(u)=\int_a^u f(x)\mathrm{d}x-\int_a^u f(t)\mathrm{d}t=\int_a^u f(x)\mathrm{d}x+\int_u^a f(x)\mathrm{d}x=\int_a^a f(x)\mathrm{d}x=0$.

7.【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了二元函数的偏导数的知识点.

【应试指导】 因 $z=x^y$，故 $\frac{\partial z}{\partial y}=x^y\ln x$.

8.【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了定积分的几何意义的知识点.

【应试指导】 由定积分的几何意义知，本题选 C.

9.【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了二元函数的二阶偏导数的知识点.

【应试指导】 $z=x\cos y$，则 $\frac{\partial z}{\partial x}=\cos y$，故 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\sin y$.

10.【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了独立事件的概率的知识点.

【应试指导】 事件 A,B 相互独立，则 $\overline{A},\overline{B}$ 也相互独立，故 $P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A})P(\overline{B})=(1-0.6)\times(1-0.9)=0.04$.

二、填空题

11.【答案】 1

【考情点拨】 本题考查了函数的间断点的知识点.

【应试指导】 $f(x)$ 在 $x=1$ 处无定义，故 $f(x)$ 在 $x=1$ 处不连续，则 $x=1$ 是函数 $f(x)$ 的间断点.

12.【答案】 0

【考情点拨】 本题考查了分段函数的连续性的知识点.

【应试指导】 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=a$，因 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，故 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=f(0)$，即 $a=f(0)=0$.

13.【答案】 $-4\sin(2x+1)$

【考情点拨】 本题考查了一元函数的高阶导数的知识点.

【应试指导】 $y=\sin(2x+1)$，则 $y'=2\cos(2x+1)$，则 $y''=-4\sin(2x+1)$.

14.【答案】 $(-\infty,-1),(1,+\infty)$

【考情点拨】 本题考查了函数的单调性的知识点.

【应试指导】 $f(x)=x+\frac{1}{x}(x\neq 0)$，则 $f'(x)=1-\frac{1}{x^2}=\frac{(x+1)(x-1)}{x^2}$. 令 $f'(x)>0$，则 $x<-1$ 或 $x>1$，即 $f(x)$ 的单调增区间为 $(-\infty,-1),(1,+\infty)$.

15.【答案】 1

【考情点拨】 本题考查了导数的几何意义的知识点.

【应试指导】 曲线在点 $(0,1)$ 处的切线斜率 $k=y'\Big|_{x=0}=(\mathrm{e}^x+2x)\Big|_{x=0}=1$.

16.【答案】 $f(x)+C$

【考情点拨】 本题考查了不定积分的性质的知识点.

【应试指导】 由不定积分的性质知，$\int f'(x)\mathrm{d}x=f(x)+C$.

17.【答案】 2

【考情点拨】 本题考查了定积分的性质的知识点.

【应试指导】 $\int_{-1}^1(x^3\cos x+1)\mathrm{d}x=\int_{-1}^1 x^3\cos x\mathrm{d}x+2$. 因为函数 $f(x)=x^3\cos x$ 在 $[-1,1]$ 上为奇函数，故 $\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x=0$，即 $\int_{-1}^1(x^3\cos x+1)\mathrm{d}x=2$.

18.【答案】 0

【考情点拨】 本题考查了定积分的计算的知识点.

【应试指导】 $\int_0^1(2x-1)^5\mathrm{d}x=\frac{1}{12}(2x-1)^6\Big|_0^1=0$.

19.【答案】 $-\frac{1}{(x+y)^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x+y}}$

【考情点拨】 本题考查了二元函数的偏导数的知识点.

【应试指导】 $z=\mathrm{e}^{\frac{1}{x+y}}$，则 $\frac{\partial z}{\partial y}=\mathrm{e}^{\frac{1}{x+y}}\left(\frac{1}{x+y}\right)'=-\frac{1}{(x+y)^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x+y}}$.

20.【答案】 $6x^2y$

【考情点拨】 本题考查了二元函数的二阶偏导数的知识点.

【应试指导】 $z=x^3y^2$，则 $\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2y^2$，故 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=6x^2y$.

三、解答题

21. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{2x}-2\mathrm{e}^x+1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x}{x}$ （3 分）

$=\lim\limits_{x\to 0}(2\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x)$ （6 分）

$=1$. （8 分）

22. $f'(x)=3ax^2+2bx$.

由 $f'(-1)=0$，得 $3a-2b=0$. ① （3 分）

曲线 $y=f(x)$ 过点 $(1,5)$，故 $a+b=5$. ② （6 分）

由 ①，② 得 $a=2,b=3$. （8 分）

23. $\int\frac{x^3}{x-1}\mathrm{d}x=\int\frac{x^3-1+1}{x-1}\mathrm{d}x$ （2 分）

$=\int(x^2+x+1+\frac{1}{x-1})\mathrm{d}x$ （6 分）

$=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+\ln|x-1|+C$. （8 分）

24. $\int_1^{\mathrm{e}}\ln x\mathrm{d}x=x\ln x\Big|_1^{\mathrm{e}}-\int_1^{\mathrm{e}}\mathrm{d}x$ （4 分）

$=\mathrm{e}-x\Big|_1^{\mathrm{e}}$ （6 分）

$=1$. （8 分）

25. 方程 $\mathrm{e}^y+xy=1$ 两边对 x 求导，得

$\mathrm{e}^y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y+x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$. （6 分）

于是 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{y}{\mathrm{e}^y+x}$. （8 分）

26. 依题意有 $\int_0^{x_0}\sin x\mathrm{d}x=\int_{x_0}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}x$，即 （4 分）

$-\cos x\Big|_0^{x_0}=-\cos x\Big|_{x_0}^{\frac{\pi}{2}}$,

$1-\cos x_0=\cos x_0$,

$\cos x_0=\frac{1}{2}$, （8 分）

得 $x_0=\frac{\pi}{3}$. （10 分）

27. 设 $A=\{3$ 件产品中至少有 1 件次品$\}$，

则 $\overline{A}=\{3$ 件产品都为正品$\}$. （2 分）

所以 $P(A)=1-P(\overline{A})$ （5 分）

$=1-\frac{\mathrm{C}_{45}^3}{\mathrm{C}_{50}^3}$

≈ 0.28. （10 分）

28. (1) 面积 $S=\int_0^2(4-x^2)\mathrm{d}x-\int_2^4(4-x^2)\mathrm{d}x$ （3 分）

$=(4x-\frac{x^3}{3})\Big|_0^2-(4x-\frac{x^3}{3})\Big|_2^4$

$=16$. （5 分）

(2) 体积 $V=\pi\int_0^4 x^2\mathrm{d}y$

$=\pi\int_0^4(4-y)\mathrm{d}y$

$=\pi(4y-\frac{1}{2}y^2)\Big|_0^4$

$=8\pi$. （10 分）

考生诚信考试承诺

“我已阅读成人高考考生(考场)有关规定，愿意在本场考试中自觉遵守，如有违反将接受处理。我保证本场考试中，本人所提供的个人信息是真实、准确的，并愿意承担相应的法律责任。”

姓名________ 考号________ 科类________

密 封 线 内 不 要 答 题

天一文化 TIANYI CULTURE

天道酬勤 一心为您

绝密★启用前

2013年成人高等学校招生全国统一考试专升本

高等数学(二)

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分,满分150分,考试时间120分钟.

题 号	一	二	三	总 分	统分人签字
分 数					

第Ⅰ卷(选择题,共40分)

得 分	评卷人

一、选择题(1～10小题,每小题4分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos 2x}{x}=$ 【 】

A. $\frac{\pi}{2}$　　B. $-\frac{\pi}{2}$　　C. $\frac{2}{\pi}$　　D. $-\frac{2}{\pi}$

2. 设函数 $y=e^x-\ln 3$,则$\dfrac{dy}{dx}=$ 【 】

A. e^x　　B. $e^x+\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $e^x-\frac{1}{3}$

3. 设函数 $f(x)=\ln(3x)$,则 $f'(2)=$ 【 】

A. 6　　B. ln6　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{6}$

4. 函数 $f(x)=1-x^3$ 在区间$(-\infty,+\infty)$ 【 】

A. 单调增加　　B. 单调减少

C. 先单调增加,后单调减少　　D. 先单调减少,后单调增加

5. $\int\dfrac{1}{x^2}dx=$ 【 】

A. $\frac{1}{x}+C$　　B. $\ln x^2+C$　　C. $-\frac{1}{x}+C$　　D. $\frac{1}{x^2}+C$

6. $\dfrac{d}{dx}\int_0^x(t+1)^2dt=$ 【 】

A. $(x+1)^2$　　B. 0　　C. $\frac{1}{3}(x+1)^3$　　D. $2(x+1)$

7. 曲线 $y=|x|$ 与直线 $y=2$ 所围成的平面图形的面积为 【 】

A. 2　　B. 4　　C. 6　　D. 8

8. 设函数 $z=\cos(x+y)$,则$\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,1)}=$ 【 】

A. cos2　　B. $-\cos 2$　　C. sin2　　D. $-\sin 2$

9. 设函数 $z=xe^y$,则$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$ 【 】

A. e^x　　B. e^y　　C. xe^y　　D. ye^x

10. 设 A,B 是两随机事件,则事件 $A-B$ 表示 【 】

A. 事件 A,B 都发生　　B. 事件 B 发生而事件 A 不发生

C. 事件 A 发生而事件 B 不发生　　D. 事件 A,B 都不发生

第Ⅱ卷(非选择题,共110分)

得 分	评卷人

二、填空题(11～20小题,每小题4分,共40分)

11. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x}{x^3-3}=$ ________.

12. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\ln x, & x\geqslant1,\\ a-x, & x<1\end{cases}$ 在 $x=1$ 处连续,则 $a=$ ________.

13. 曲线 $y=x^3-3x^2+5x-4$ 的拐点坐标为________.

14. 设函数 $y=e^{x+1}$,则 $y''=$ ________.

15. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{3x}=$ ________.

16. 设曲线 $y=ax^2+2x$ 在点$(1,a+2)$处的切线与直线 $y=4x$ 平行,则 $a=$ ________.

17. $\int e^{3x}dx=$ ________.

18. $\int_{-1}^{1}(x^3+3x)dx=$ ________.

19. $\int_{-\infty}^{0}e^x dx=$ ________.

20. 设函数 $z=x^2+\ln y$,则 $dz=$ ________.

得　分	评卷人

三、解答题(21 ～ 28 题,共 70 分.解答应写出推理、演算步骤)

21.(本题满分 8 分)

计算$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-2x+1}{x^2-1}$.

22.(本题满分 8 分)

设函数 $y=\sin x^2+2x$,求 $\mathrm{d}y$.

23.(本题满分 8 分)

计算$\int\dfrac{1+x\mathrm{e}^{5x}}{x}\mathrm{d}x$.

24.(本题满分 8 分)

计算$\int_1^{\mathrm{e}}\ln x\mathrm{d}x$.

★★★★密封线内不要答题★★★★

★
★
★
★
密
封
线
内
不
要
答
题
★
★
★
★

25.(本题满分 8 分)

已知离散型随机变量 X 的概率分布为

X	10	20	30	40
P	0.2	0.1	0.5	a

(1) 求常数 a;

(2) 求 X 的数学期望 EX.

26.(本题满分 10 分)

求曲线 $y=x^2$ 与直线 $y=0,x=1$ 所围成的平面图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积 V.

27.(本题满分 10 分)

求函数 $f(x)=x^3-3x^2-9x+2$ 的单调区间和极值.

28.(本题满分 10 分)

求函数 $f(x,y)=x^2+y^2$ 在条件 $2x+3y=1$ 下的极值.

参考答案及解析

一、选择题

1.【答案】D

【考情点拨】本题考查了极限的性质的知识点.

【应试指导】$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 2x}{x}=\frac{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos 2x}{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}x}=\frac{\cos\pi}{\frac{\pi}{2}}=-\frac{2}{\pi}$.

2.【答案】A

【考情点拨】本题考查了一元函数的微分的知识点.

【应试指导】因为 $y=e^x-\ln 3$,

故 $\frac{dy}{dx}=y'=(e^x-\ln 3)'=e^x$.

3.【答案】C

【考情点拨】本题考查了复合函数求导的知识点.

【应试指导】因为 $f'(x)=\frac{1}{3x}\cdot(3x)'=3\cdot\frac{1}{3x}=\frac{1}{x}$,故 $f'(2)=\frac{1}{2}$.

4.【答案】B

【考情点拨】本题考查了函数的单调性的知识点.

【应试指导】因为 $f'(x)=-3x^2\leqslant 0, x\in(-\infty,+\infty)$,故函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调减少.

5.【答案】C

【考情点拨】本题考查了不定积分的知识点.

【应试指导】$\int\frac{1}{x^2}dx=\int d\left(-\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{x}+C$.

6.【答案】A

【考情点拨】本题考查了定积分与原函数的关系的知识点.

【应试指导】因为 $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$,

故 $\frac{d}{dx}\int_0^x(t+1)^2dt=(x+1)^2$.

7.【答案】B

【考情点拨】本题考查了曲线所围成的图形的面积的知识点.

【应试指导】因所围成的图形关于直线 $x=0$ 对称,故 $S=2\int_0^2(2-x)dx=2\left(2x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^2=4$.

8.【答案】D

【考情点拨】本题考查了二元函数的偏导数的知识点.

【应试指导】因为 $z=\cos(x+y)$,故 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\sin(x+y)$,则 $\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1,1)}=-\sin 2$.

9.【答案】B

【考情点拨】本题考查了二元函数的二阶偏导数的知识点.

【应试指导】因为 $z=xe^y$,则 $\frac{\partial z}{\partial x}=e^y,\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=e^y$.

10.【答案】C

【考情点拨】本题考查了随机事件中的差事件的知识点.

【应试指导】选项 A 表示事件 $A\cap B$,选项 B 表示事件 $B-A$,选项 D 表示事件 $\overline{A}\cap\overline{B}$.

二、填空题

11.【答案】-1

【考情点拨】本题考查了极限的性质的知识点.

【应试指导】$\lim\limits_{x\to1}\frac{2x}{x^3-3}=\frac{\lim\limits_{x\to1}2x}{\lim\limits_{x\to1}(x^3-3)}=\frac{2}{-2}=-1$.

12.【答案】1

【考情点拨】本题考查了函数在一点的连续性的知识点.

【应试指导】$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}(a-x)=a-1$,因为函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续,故 $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=f(1)=\ln 1=0$,即 $a-1=0$,故 $a=1$.

13.【答案】$(1,-1)$

【考情点拨】本题考查了拐点的知识点.

【应试指导】易知 $y''=6x-6=0$,得 $x=1$,此时,$y=-1$. 当 $x>1$ 时,$y''>0$;当 $x<1$ 时,$y''<0$,故曲线的拐点为 $(1,-1)$.

14.【答案】e^{x+1}

【考情点拨】本题考查了一元函数的高阶导数的知识点.

【应试指导】因为 $y=e^{x+1}$,故 $y'=e^{x+1}, y''=e^{x+1}$.

15.【答案】e^3

【考情点拨】本题考查了特殊极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$ 的应用的知识点.

【应试指导】$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^3=e^3$.

16.【答案】1

【考情点拨】本题考查了曲线在某点的切线的知识点.

【应试指导】因为该切线与直线 $y=4x$ 平行,故切线的斜率 $k=4$,而曲线斜率 $y'(1)=2a+2$,故 $2a+2=4$,即 $a=1$.

17.【答案】$\frac{1}{3}e^{3x}+C$

【考情点拨】本题考查了不定积分的知识点.

【应试指导】$\int e^{3x}dx=\int\frac{1}{3}de^{3x}=\frac{1}{3}e^{3x}+C$.

18.【答案】0

【考情点拨】本题考查了定积分的性质的知识点.

【应试指导】因为函数 $f(x)=x^3+3x$ 在 $[-1,1]$ 上为奇函数,故 $\int_{-1}^1 f(x)dx=0$.

19.【答案】1

【考情点拨】本题考查了反常积分的知识点.

【应试指导】$\int_{-\infty}^0 e^x dx=\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^0 e^x dx$

$=\lim\limits_{a\to-\infty}(1-e^a)$

$=1-\lim\limits_{a\to-\infty}e^a=1$.

20.【答案】$2xdx+\frac{1}{y}dy$

【考情点拨】本题考查了二元函数的全微分的知识点.

【应试指导】因为 $\frac{\partial z}{\partial x}=2x,\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{y}$,

故 $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=2xdx+\frac{1}{y}dy$.

三、解答题

21. $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-2x+1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{3x^2-2}{2x}$ (6分)

$=\frac{1}{2}$. (8分)

22. 因为 $y'=(x^2)'\cos x^2+2$ (3分)

$=2x\cos x^2+2$, (6分)

故 $dy=(2x\cos x^2+2)dx$. (8分)

23. $\int\frac{1+xe^{5x}}{x}dx=\int\left(\frac{1}{x}+e^{5x}\right)dx$ (2分)

$=\ln|x|+\frac{e^{5x}}{5}+C$. (8分)

24. $\int_1^e \ln x dx=x\ln x\Big|_1^e-\int_1^e xd(\ln x)$ (4分)

$=e-x\Big|_1^e$ (6分)

$=1$. (8分)

25. (1) 因为 $0.2+0.1+0.5+a=1$,所以 $a=0.2$. (3分)

(2) $EX=10\times0.2+20\times0.1+30\times0.5+40\times0.2$

$=27$. (8分)

26. $V=\int_0^1\pi(x^2)^2dx$ (4分)

$=\pi\int_0^1 x^4dx$

$=\pi\left(\frac{1}{5}x^5\right)\Big|_0^1$ (8分)

$=\frac{\pi}{5}$. (10分)

27. 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$.

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$. (4分)

令 $f'(x)=0$,得驻点 $x_1=-1,x_2=3$.

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,3)$	3	$(3,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	极大值 7	↘	极小值 −25	↗

因此 $f(x)$ 的单调增区间是 $(-\infty,-1),(3,+\infty)$;单调减区间是 $(-1,3)$.

$f(x)$ 的极小值为 $f(3)=-25$,

极大值为 $f(-1)=7$. (10分)

28. 作辅助函数

$F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda(2x+3y-1)$

$=x^2+y^2+\lambda(2x+3y-1)$. (4分)

令 $\begin{cases}F'_x=2x+2\lambda=0,\\F'_y=2y+3\lambda=0,\\F'_\lambda=2x+3y-1=0,\end{cases}$ (6分)

得 $x=\frac{2}{13},y=\frac{3}{13},\lambda=-\frac{2}{13}$. (8分)

因此,$f(x,y)$ 在条件 $2x+3y=1$ 下的极值为 $f\left(\frac{2}{13},\frac{3}{13}\right)=\frac{1}{13}$. (10分)

考生诚信考试承诺

“我已阅读成人高考考生（考场）有关规定，愿意在本场考试中自觉遵守。如有违反将接受处理；我保证本场考试中，本人所提供的个人信息是真实、准确的，并愿意承担相应的法律责任。”

姓名________ 考号________ 科类________

密封线内不要答题

绝密★启用前

全国各类成人高等学校招生考试专升本高等数学(二)

全真模拟(一)

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分,满分 150 分,考试时间 120 分钟.

题　号	一	二	三	总　分	统分人签字
分　数					

第 Ⅰ 卷(选择题,共 40 分)

得　分	评卷人

一、选择题(1 ～ 10 小题,每小题 4 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 下列极限等于 1 的是　　【　】

A. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\arctan x}{x}$　　B. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{x}$

C. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+1}{3x+5}$　　D. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$

2. 函数 $y=|x|+1$ 在 $x=0$ 处　　【　】

A. 无定义　　B. 不连续

C. 连续但是不可导　　D. 可导

3. 函数 $y=\dfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ 在区间 $(-1,1)$ 内　　【　】

A. 单调减少　　B. 单调增加

C. 不增不减　　D. 有增有减

4. 函数 $f(x)=x^4-24x^2+6x$ 在定义域内的凸区间是　　【　】

A. $(-\infty,0)$　　B. $(-2,2)$

C. $(0,+\infty)$　　D. $(-\infty,+\infty)$

5. 若 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\dfrac{x^4}{2}$,则 $\int_0^4\dfrac{1}{\sqrt{x}}f(\sqrt{x})\mathrm{d}x$ 等于　　【　】

A. 2　　B. 4　　C. 8　　D. 16

6. 积分 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}x$ 等于　　【　】

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 2

7. 若 $\int_{-\infty}^0 e^{kx}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}$,则 k 等于　　【　】

A. $\dfrac{1}{3}$　　B. $-\dfrac{1}{3}$　　C. 3　　D. -3

8. 设 $z=xe^{xy}$,则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 等于　　【　】

A. xye^{xy}　　B. x^2e^{xy}

C. e^{xy}　　D. $(1+xy)e^{xy}$

9. 设函数 $z=\ln xy+e^{x^2y}$,则 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,2)}=$　　【　】

A. $\dfrac{1}{2}-2e^2$　　B. $\dfrac{1}{2}+e^2$　　C. $1+2e^2$　　D. $1+e^2$

10. 把两封信随机地投入标号为 1,2,3,4 的 4 个邮筒中,则 1,2 号邮筒各有一封信的概率等于　　【　】

A. $\dfrac{1}{16}$　　B. $\dfrac{1}{12}$　　C. $\dfrac{1}{8}$　　D. $\dfrac{1}{4}$

第 Ⅱ 卷(非选择题,共 110 分)

得　分	评卷人

二、填空题(11 ～ 20 小题,每小题 4 分,共 40 分)

11. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^{3x}=$ ________.

12. $y=\arctan e^x$,则 $y'\big|_{x=0}=$ ________.

13. 设 $y=y(x)$ 由 $x^2+2xy-y^2=2x$ 确定,且 $y\big|_{x=2}=0$,则 $y'\big|_{x=2}=$ ________.

14. 曲线 $x^2+y^2=2x$ 在点 $(1,1)$ 处的切线方程为________.

15. 曲线 $y=x^3-3x^2+2x+1$ 的拐点是________.

16. $\int(\sqrt{x}-1)\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=$ ________.

17. $\int\sin 2x\cos x\mathrm{d}x=$ ________.

18. $\int_{-1}^1\dfrac{x}{\sqrt{10-6x}}\mathrm{d}x=$ ________.

19. $\int_1^e\ln x\mathrm{d}x=$ ________.

20. 若 $z=\ln(x+e^y)$,则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$ ________.

得　分	评卷人

三、解答题(21～28题,共70分.解答应写出推理、演算步骤)

21.(本题满分8分)

计算$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1-\sqrt{1-x^2}}$.

22.(本题满分8分)

求极限$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$.

23.(本题满分8分)

求$\int_0^{+\infty} xe^{-x}\mathrm{d}x$.

24.(本题满分8分)

设f''存在,$z=\dfrac{1}{x}f(xy)+yf(x+y)$,求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

25.(本题满分8分)

一个袋子中有5个球,编号为1,2,3,4,5,同时从中任取3个,以X表示取出的3个球中的最大号码,求随机变量X的概率分布.

26.(本题满分10分)

求$y=f(x)=2x^3-3x^2-12x+14$的极值点和极值,以及函数曲线的凸凹性区间和拐点.

27.(本题满分10分)

设$z=\sin(xy^2)+e^{x^2y}$,求$\mathrm{d}z$.

28.(本题满分10分)

当$x>0$时,证明:$e^x>1+x$.

★★★★密封线内不要答题★★★★

考生诚信考试承诺

"我已阅读成人高考考生(考场)有关规定,愿意在本场考试中自觉遵守。如有违反将接受处理。我保证本场考试中,本人所提供的个人信息是真实、准确的,并愿意承担相应的法律责任。"

科类________ 考号________ 姓名________

密 封 线 内 不 要 答 题

天一文化 TIANYI CULTURE

天道酬勤 一心为您

天一文化 TIANYI CULTURE

绝密★启用前

全国各类成人高等学校招生考试专升本高等数学(二)

全真模拟(二)

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分.满分150分.考试时间120分钟.

题　号	一	二	三	总　分	统分人签字
分　数					

第 Ⅰ 卷(选择题,共40分)

得　分	评卷人

一、选择题(1～10小题,每小题4分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 当 $x\to 0$ 时,下列变量是无穷小量的是　【　】

A. $\dfrac{\sin x}{x}$　　B. $\ln|x|$

C. $\dfrac{x}{1+x}$　　D. $\cot x$

2. 曲线 $y=x^3-3x$ 上切线平行于 x 轴的点是　【　】

A. $(0,0)$　　B. $(1,2)$

C. $(-1,2)$　　D. $(-1,-2)$

3. 若 $f(u)$ 可导,且 $y=f(\mathrm{e}^x)$,则 $\mathrm{d}y=$　【　】

A. $f'(\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x$　　B. $f'(\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$

C. $f(\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$　　D. $f'(\mathrm{e}^x)$

4. 已知函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导,且 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h}{f(x_0-2h)-f(x_0)}=\dfrac{1}{4}$,则 $f'(x_0)$ 等于　【　】

A. -4　　B. -2　　C. 2　　D. 4

5. 如果在区间 (a,b) 内,函数 $f(x)$ 满足 $f'(x)>0$,$f''(x)<0$,则函数在此区间是　【　】

A. 单调递增且曲线为凹的　　B. 单调递减且曲线为凸的

C. 单调递增且曲线为凸的　　D. 单调递减且曲线为凹的

6. 曲线 $y=(x-1)^3-1$ 的拐点是　【　】

A. $(2,0)$　　B. $(1,-1)$

C. $(0,-2)$　　D. 不存在

7. 若 $\int f(x)\mathrm{d}x=\ln(x+\sqrt{1+x^2})+C$,则 $f(x)$ 等于　【　】

A. $-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　　B. $\dfrac{1}{1+x^2}$

C. $-\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$　　D. $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

8. 下列反常积分收敛的是　【　】

A. $\int_1^{+\infty}\cos x\mathrm{d}x$　　B. $\int_1^{+\infty}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$　　C. $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x^3}\mathrm{d}x$　　D. $\int_1^{+\infty}\ln x\mathrm{d}x$

9. 设 $z=x^y$,则 $\mathrm{d}z=$　【　】

A. $yx^{y-1}\mathrm{d}x+x^y\ln x\mathrm{d}y$　　B. $x^{y-1}\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y$

C. $x^y(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)$　　D. $x^y(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)$

10. 某建筑物按设计要求使用寿命超过50年的概率为0.8,超过60年的概率为0.6,该建筑物经历了50年后,它将在10年内倒塌的概率等于　【　】

A. 0.25　　B. 0.30　　C. 0.35　　D. 0.40

第 Ⅱ 卷(非选择题,共110分)

得　分	评卷人

二、填空题(11～20小题,每小题4分,共40分)

11. $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\dfrac{x^2-2\sqrt{3}x+3}{x^2-3}=$__________.

12. 当 $f(0)=$__________时,$f(x)=\ln(1+kx)^{\frac{m}{x}}$ 在 $x=0$ 处连续.

13. 若 $f'(x_0)=1$,$f(x_0)=0$,则 $\lim\limits_{h\to\infty}hf\left(x_0-\dfrac{1}{h}\right)=$__________.

14. 设 $y=x^2\cos x+2^x+\mathrm{e}$,则 $y'=$__________.

15. $\int_{-1}^{1}\dfrac{x^2\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x=$__________.

16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x\cos^2 t\mathrm{d}t}{x}=$__________.

17. 设 $f(x)=\mathrm{e}^{-x}$,则 $\int\dfrac{f'(\ln x)}{x}\mathrm{d}x=$__________.

18. 设 $z=\cos(xy^2)$,则 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=$__________.

19. 设 $z=\dfrac{(x-2y)^2}{2x+y}$,则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=$__________.

20. 设 $z=\mathrm{e}^{x\mathrm{e}^y}$,则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$__________.

得 分	评卷人

三、解答题(21 ～ 28 题,共 70 分.解答应写出推理、演算步骤)

21.(本题满分 8 分)

计算$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{\sin^2 x}$.

22.(本题满分 8 分)

试确定 a,b 的值,使函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\sin ax+1, & x<0,\\ 2, & x=0,\\ x\sin\dfrac{1}{x}+b, & x>0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续.

23.(本题满分 8 分)

设 $y=\ln\cos x$,求 $y''(0)$.

24.(本题满分 8 分)

求$\displaystyle\int\frac{1+\sin 2x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$.

25.(本题满分 8 分)

从一批有 10 件正品及 2 件次品的产品中,不放回地一件一件地抽取产品.设每个产品被抽到的可能性相同.求直到取出正品为止所需抽取的次数 X 的概率分布.

26.(本题满分 10 分)

确定函数 $y=2x^4-12x^2$ 的单调区间、极值及函数曲线的凸凹性区间和拐点.

27.(本题满分 10 分)

求曲线 $y=x^2$ 与该曲线在 $x=a(a>0)$ 处的切线与 x 轴所围的平面图形的面积.

28.(本题满分 10 分)

求由方程 $2x^2+y^2+z^2+2xy-2x-2y-4z+4=0$ 确定的隐函数的全微分.

★★★★密封线内不要答题★★★★

考生诚信考试承诺

“我已阅读成人高考考生(考场)有关规定，愿意在本场考试中自觉遵守。如有违反将接受处理。我保证本场考试中，本人所提供的个人信息是真实、准确的，并愿意承担相应的法律责任。”

姓名＿＿＿＿＿＿ 考号＿＿＿＿＿＿ 科类＿＿＿＿＿＿

密 封 线 内 不 要 答 题

天一文化

天道酬勤 一心为您

绝密★启用前

全国各类成人高等学校招生考试专升本高等数学(二)

全真模拟(三)

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分.满分150分.考试时间120分钟.

题　号	一	二	三	总　分	统分人签字
分　数					

第Ⅰ卷(选择题,共40分)

得　分	评卷人

一、选择题(1～10小题,每小题4分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 当 $x\to 0$ 时,无穷小量 $x+\sin x$ 是比 x 的 【　　】

A. 高阶无穷小　　B. 低阶无穷小

C. 同阶但非等价无穷小　　D. 等价无穷小

2. 下列极限计算正确的是 【　　】

A. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=0$　　B. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1$

C. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{\sin x}=1$　　D. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=1$

3. 设 $f'(1)=1$,则 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x^2-1}$ 等于 【　　】

A. 0　　B. 1　　C. $\dfrac{1}{2}$　　D. 2

4. 设 $f'(\cos^2 x)=\sin^2 x$,且 $f(0)=0$,则 $f(x)$ 等于 【　　】

A. $x+\dfrac{1}{2}x^2$　　B. $x-\dfrac{1}{2}x^2$　　C. $\sin^2 x$　　D. $\cos x-\dfrac{1}{2}\cos^2 x$

5. 设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数,则 $\int\cos x f(\sin x)\mathrm{d}x=$ 【　　】

A. $F(\cos x)+C$　　B. $F(\sin x)+C$　　C. $-F(\cos x)+C$　　D. $-F(\sin x)+C$

6. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,且 $a\neq -b$,则下列各式不成立的是 【　　】

A. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$　　B. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=-\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$

C. $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x=0$　　D. 若 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$,必有 $f(x)=0$

7. 下列反常积分发散的是 【　　】

A. $\int_2^{+\infty}\dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x$　　B. $\int_2^{+\infty}\dfrac{1}{x\cdot\ln^2 x}\mathrm{d}x$

C. $\int_{-\infty}^0 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$　　D. $\int_{-\infty}^0 \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$

8. 设 $z=\ln\dfrac{y}{x}$,则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 等于 【　　】

A. $\dfrac{x}{y}$　　B. $\dfrac{1}{x}$　　C. $-\dfrac{1}{x}$　　D. $-\dfrac{y}{x^2}$

9. 设 $z=x^3\mathrm{e}^{y^2}$,则 $\mathrm{d}z$ 等于 【　　】

A. $6x^2y\mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$　　B. $x^2\mathrm{e}^{y^2}(3\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y)$

C. $3x^2\mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}x$　　D. $x^3\mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}y$

10. 甲、乙两人独立地对同一目标射击一次,其命中率分别为0.6和0.5,现已知目标被命中,是甲射中的概率为 【　　】

A. 0.6　　B. 0.75　　C. 0.85　　D. 0.9

第Ⅱ卷(非选择题,共110分)

得　分	评卷人

二、填空题(11～20小题,每小题4分,共40分)

11. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\frac{2}{x}}{\sin\frac{4}{x}}=$＿＿＿＿＿＿.

12. 函数 $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^x, & x>0,\\ \dfrac{a+x^2}{6}, & x\leqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续,则 $a=$＿＿＿＿＿＿.

13. $y=\cos\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$,则 $\mathrm{d}y=$＿＿＿＿＿＿.

14. $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{3}{x}}=$＿＿＿＿＿＿.

15. 设 $z=\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}$,则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$＿＿＿＿＿＿.

16. 设 $y=\mathrm{e}^{2\arccos x}$,则 $y'\Big|_{x=0}=$＿＿＿＿＿＿.

17. $\int_0^2 |x-1|\mathrm{d}x=$＿＿＿＿＿＿.

18. $\int\dfrac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x=$＿＿＿＿＿＿.

19. $\int\sec^2 5x\mathrm{d}x=$＿＿＿＿＿＿.

20. 设 $f(x)$ 是 $[-2,2]$ 上的偶函数,且 $f'(-1)=3$,则 $f'(1)=$＿＿＿＿＿＿.

得　分	评卷人

三、解答题(21～28题,共70分.解答应写出推理、演算步骤)

21.(本题满分8分)

设$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+ax+b}{x-1}=5$,求$a,b$.

22.(本题满分8分)

求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+\sin x-1}{\ln(1+x)}$.

23.(本题满分8分)

设$y=\sin\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$,求$y'$.

24.(本题满分8分)

计算$\int\dfrac{x+\arctan x}{1+x^2}dx$.

25.(本题满分8分)

已知$\int_1^{x+1}f(t)dt=xe^{x+1}$,求$f'(x)$.

26.(本题满分10分)

求函数$y=2x^3-3x^2$的单调区间、极值及函数曲线的凸凹性区间、拐点和渐近线.

27.(本题满分10分)

一批零件中有10个合格品,3个次品,安装机器时,从这批零件中任取一个,取到合格品才能安装.若取出的是次品,则不再放回,求在取得合格品前已取出的次品数X的概率分布.

28.(本题满分10分)

计算$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\int_1^x\left(\int_t^1 e^{-u^2}du\right)dt}{(x-1)^2}$.

★★★★密封线内不要答题★★★★

考生诚信
考试承诺

“我已阅读成人高考考生(考场)有关规定，愿意在本场考试中自觉遵守。如有违反将接受处理。我保证本场考试中，本人所提供的个人信息是真实、准确的，并愿意承担相应的法律责任。”

姓名________ 考号________ 科类________

密 封 线 内 不 要 答 题

天道酬勤 一心为您

绝密★启用前

全国各类成人高等学校招生考试专升本高等数学(二)

全真模拟(四)

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分.满分150分.考试时间120分钟.

题　号	一	二	三	总　分	统分人签字
分　数					

第Ⅰ卷(选择题，共40分)

得　分	评卷人

一、选择题(1～10小题，每小题4分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的)

1. 下列变量在给定的变化过程中是无穷小量的是　【　】

A. $\frac{\sin x}{x}(x\to 0)$　　B. $2^{-x}-2(x\to 0)$

C. $\frac{x^2}{\sqrt{x^4+1}}(x\to +\infty)$　　D. $x\cdot\sin\frac{1}{x}(x\to 0)$

2. 函数 $f(x)=\begin{cases}x-1, & 0\leqslant x<1,\\ 2x, & 1\leqslant x\leqslant 3\end{cases}$ 的连续区间是　【　】

A. $[0,1)\cup(1,3]$　　B. $[1,3]$

C. $[0,1)$　　D. $[0,3]$

3. 函数 $y=ax^2+c$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调增加，则 a,c 应满足　【　】

A. $a<0$ 且 $c=0$　　B. $a>0$ 且 c 是任意常数

C. $a<0$ 且 $c\neq 0$　　D. $a<0$ 且 c 是任意常数

4. 曲线 $y=x^4-3$ 在点 $(1,-2)$ 处的切线方程为　【　】

A. $2x-y-6=0$　　B. $4x-y-6=0$

C. $4x-y-2=0$　　D. $2x-y-4=0$

5. 不定积分 $\int\left(\frac{1}{\sin^2 x}+1\right)\mathrm{d}\sin x$ 等于　【　】

A. $-\frac{1}{\sin x}+\sin x+C$　　B. $\frac{1}{\sin x}+\sin x+C$

C. $-\cot x+\sin x+C$　　D. $\cot x+\sin x+C$

6. 设 $z=(3x^2+y^2)^{xy}$，则 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 等于　【　】

A. $xy\cdot(3x^2+y^2)^{xy-1}$

B. $(3x^2+y^2)^{xy}\cdot\ln(3x^2+y^2)$

C. $y\cdot(3x^2+y^2)^{xy}[(3x^2+y^2)\ln(3x^2+y^2)+6x^2]$

D. $y\cdot(3x^2+y^2)^{xy-1}[(3x^2+y^2)\ln(3x^2+y^2)+6x^2]$

7. 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$ 等于　【　】

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

8. 对于函数 $z=xy$，原点 $(0,0)$　【　】

A. 不是函数的驻点　　B. 是驻点不是极值点

C. 是驻点也是极值点　　D. 无法判定是否为极值点

9. 曲线 $y=e^x$ 和直线 $y=1,x=1$ 围成的图形面积等于　【　】

A. $2-e$　　B. $e-2$　　C. $e-1$　　D. $e+1$

10. 有两箱同种零件，第一箱内装50件，其中一等品10件；第二箱内装30件，其中一等品18件；现随机地从两箱中挑出一箱，再从这箱中随机地取出一件零件，则取出的零件是一等品的概率为　【　】

A. $\frac{1}{5}$　　B. $\frac{2}{5}$　　C. $\frac{3}{5}$　　D. $\frac{4}{5}$

第Ⅱ卷(非选择题，共110分)

得　分	评卷人

二、填空题(11～20小题，每小题4分，共40分)

11. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+3x+1}{3x^2+x+2}=$________.

12. 设 $f(x)=x^3-2x^2+5x+1$，则 $f'(0)=$________.

13. 设 $y=e^x\cos x$，则 $y''=$________.

14. $\int\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}\mathrm{d}x=$________.

15. $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{2}{x}}=$________.

16. 若由 $e^y=xy$ 确定 y 是 x 的函数，则 $y'=$________.

17. $\int x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x=$________.

18. $\int_0^2\frac{1}{x^2-4x+3}\mathrm{d}x=$________.

19. 设 $z=u^2\ln v,u=\frac{y}{x},v=e^{x^2y}$，则 $\mathrm{d}z=$________.

20. 设 $z=\sqrt{x(x+y^2)}$，则 $\frac{\partial z}{\partial y}=$________.

得　分	评卷人

三、解答题(21 ～ 28 题,共 70 分.解答应写出推理、演算步骤)

21.(本题满分 8 分)

设 $y = 2x^3\arccos x + (x^2-2)\sqrt{1-x^2}$,求 $\mathrm{d}y$.

22.(本题满分 8 分)

求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \frac{\sin t^2}{t}\mathrm{d}t}{x^2}$.

23.(本题满分 8 分)

计算 $\int x^2 \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$.

24.(本题满分 8 分)

计算 $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \dfrac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

25.(本题满分 8 分)

设 $f(u)$ 有二阶导数,计算 $\dfrac{\partial^2 f(\mathrm{e}^{xy})}{\partial x^2}$.

26.(本题满分 10 分)

已知曲线 $y = ax^3 + bx^2 + cx$ 在点(1,2)处有水平切线,且原点为该曲线的拐点,求 a,b,c 的值,并写出此曲线的方程.

27.(本题满分 10 分)

袋中有 4 个白球,2 个红球,从中任取 3 个球,用 X 表示所取 3 个球中红球的个数,求 X 的概率分布.

28.(本题满分 10 分)

设连续函数 $f(x) = \ln x - \int_1^{\mathrm{e}} f(x)\mathrm{d}x$,证明:$\int_1^{\mathrm{e}} f(x)\mathrm{d}x = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

★★★★密封线内不要答题★★★★

考生诚信考试承诺

我已阅读成人高考考生(考场)有关规定,愿意在本场考试中自觉遵守。如有违反将接受处理。我保证在本场考试中,本人所提供的个人信息是真实、准确的,并愿意承担相应的法律责任。

姓名________ 考号________ 科类________

★ ★ ★ ★ 密 封 线 内 不 要 答 题 ★ ★ ★ ★

天一文化 TIANYI CULTURE

天道酬勤 一心为您

绝密★启用前

天一文化 TIANYI CULTURE

全国各类成人高等学校招生考试专升本高等数学(二)

全真模拟(五)

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分,满分 150 分,考试时间 120 分钟.

题 号	一	二	三	总 分	统分人签字
分 数					

第 Ⅰ 卷(选择题,共 40 分)

得 分	评卷人

一、选择题(1 ~ 10 小题,每小题 4 分,共 40 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x}{x}, & x\neq 0,\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续,则 $a=$ 【 】

A. -1　　B. 1　　C. 2　　D. 3

2. 函数 $y=x+\cos x$ 在 $(0,2\pi)$ 内 【 】

A. 单调增加　　B. 单调减少　　C. 不单调　　D. 不连续

3. 设 $\int f(x)\mathrm{d}x=x^2+C$,则 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(-\sin x)\cos x\mathrm{d}x=$ 【 】

A. 1　　B. -1　　C. $\dfrac{\pi^2}{4}$　　D. $-\dfrac{\pi^2}{4}$

4. 设在 (a,b) 内有 $\int f'(x)\mathrm{d}x=\int g'(x)\mathrm{d}x$,则在 (a,b) 内必定有 【 】

A. $f(x)-g(x)=0$　　B. $f(x)-g(x)=C$

C. $\mathrm{d}f(x)\neq \mathrm{d}g(x)$　　D. $f(x)\mathrm{d}x=g(x)\mathrm{d}x$

5. 设 $f(x)$ 是可导函数,且 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+2h)-f(x_0)}{h}=1$,则 $f'(x_0)=$ 【 】

A. 1　　B. 0　　C. 2　　D. $\dfrac{1}{2}$

6. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{x^2}\sin t^2\mathrm{d}t=$ 【 】

A. $2x\cos x^4$　　B. $x^2\cos x^4$

C. $2x\sin x^4$　　D. $x^2\sin x^4$

7. 当 $x\to 1$ 时,$\dfrac{1-x}{1+x}$ 是 $1-\sqrt{x}$ 的 【 】

A. 高阶无穷小　　B. 低阶无穷小

C. 等价无穷小　　D. 不可比较

8. 曲线 $ye^x+\ln y=1$,在点 $(0,1)$ 处的切线方程为 【 】

A. $y-1=-\dfrac{x}{2}$　　B. $y=-\dfrac{1}{2}(x-1)$

C. $y-1=-\dfrac{x}{3}$　　D. $y-1=-\dfrac{x}{4}$

9. 曲线 $y=3x^2-x^3$ 的凸区间为 【 】

A. $(-\infty,1)$　　B. $(1,+\infty)$

C. $(-\infty,0)$　　D. $(0,+\infty)$

10. 事件 A,B 满足 $AB=A$,则 A 与 B 的关系为 【 】

A. $A=B$　　B. $A\subset B$　　C. $A\supset B$　　D. $A=\overline{B}$

第 Ⅱ 卷(非选择题,共 110 分)

得 分	评卷人

二、填空题(11 ~ 20 小题,每小题 4 分,共 40 分)

11. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}=$ ________.

12. $\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{t-\sqrt{t}}{\sqrt{t}-1}=$ ________.

13. $y=\dfrac{1}{1+\tan x}$,则 $y'=$ ________.

14. 设 $y=\sin x$,则 $y^{(10)}=$ ________.

15. $y=y(x)$ 由方程 $xy=e^{y-x}$ 确定,则 $\mathrm{d}y=$ ________.

16. 已知 $\int k\tan 2x\mathrm{d}x=\dfrac{2}{3}\ln|\cos 2x|+C$,则 $k=$ ________.

17. $\int_2^{+\infty}\dfrac{1}{x^3}\mathrm{d}x=$ ________.

18. 设 $z=\arctan\sqrt{\dfrac{y}{x}}$,则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=$ ________.

19. 设 $z=e^{\sin x}\cos y$,则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=$ ________.

20. $\int_e^{e^2}\ln x\mathrm{d}x=$ ________.

得　分	评卷人

三、解答题(21～28题,共70分.解答应写出推理、演算步骤)

21.(本题满分8分)

设 $y=(\tan x)^{\frac{1}{x}}$,求 $\mathrm{d}y$.

22.(本题满分8分)

设 $x_1=1,x_2=2$ 均为 $y=a\ln x+bx^2+3x$ 的极值点,求 a,b.

23.(本题满分8分)

计算 $\int\frac{e^{2x}}{1+e^x}\mathrm{d}x$.

24.(本题满分8分)

设 $z=\ln(x^2-y^2)$,其中 $y=e^x$,求 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$.

25.(本题满分8分)

某运动员投篮命中率为0.3,求一次投篮时投中次数的概率分布及分布函数.

26.(本题满分10分)

设 $f(x)$ 是连续函数,且 $f(x)=x+2\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$,求 $f(x)$.

27.(本题满分10分)

求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}te^t\sin t\mathrm{d}t}{x^6}$.

28.(本题满分10分)

试用夹逼定理证明:$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 x^n\sqrt{3+x}\mathrm{d}x=0$.

★★★★密封线内不要答题★★★★

考生诚信考试承诺

我已阅读成人高考考生(考场)有关规定,愿意在本场考试中自觉遵守。如有违反将接受处理。我保证在本场考试中,本人所提供的个人信息是真实、准确的,并愿意承担相应的法律责任。

姓名________ 考号________ 科类________

密 封 线 内 不 要 答 题

绝密★启用前

全国各类成人高等学校招生考试专升本高等数学(二)

全真模拟(六)

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分,满分150分,考试时间120分钟.

题号	一	二	三	总分	统分人签字
分数					

第Ⅰ卷(选择题,共40分)

得分	评卷人

一、选择题(1～10小题,每小题4分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. $\int \sin 2x\,dx=$ 【 】

A. $\cos 2x+C$　B. $-\cos 2x+C$

C. $\frac{1}{2}\cos 2x+C$　D. $-\frac{1}{2}\cos 2x+C$

2. 若 $f(x)$ 为偶函数,则 $\int_0^x f(t)\,dt$ 是 【 】

A. 奇函数　B. 偶函数

C. 非奇非偶函数　D. 周期函数

3. 称 e^{-x} 是无穷小量是指在下列哪一过程中它是无穷小量 【 】

A. $x\to 0$　B. $x\to\infty$　C. $x\to+\infty$　D. $x\to-\infty$

4. 若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$,则 $f(x)$ 在 x_0 点 【 】

A. 一定有定义　B. 一定有 $f(x_0)=A$

C. 一定连续　D. 极限一定存在

5. $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{1}{x\sqrt{x}}$,则 $f'(1)=$ 【 】

A. $-\frac{1}{6}$　B. $\frac{5}{6}$　C. $-\frac{5}{6}$　D. $\frac{1}{6}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=$ 【 】

A. 1　B. $\frac{1}{2}$　C. 2　D. 不存在

7. 函数 $f(x)=(x^2-1)^3+1$,在 $x=1$ 处 【 】

A. 有极大值1　B. 有极小值1

C. 有极小值0　D. 无极值

8. 曲线 $y=2+(x-4)^{\frac{1}{3}}$ 的拐点为 【 】

A. $(4,2)$　B. $x=4$

C. $y=2$　D. $(2,4)$

9. $\int_1^e x\ln x\,dx=$ 【 】

A. 0　B. $\frac{1}{4}(e^2+1)$

C. $\frac{1}{4}(e^2-1)$　D. e^2-1

10. 已知离散型随机变量 X 的概率分布为

X	0	1
P	0.5	0.5

则 $E(X)=$ 【 】

A. 0　B. 1　C. 0.5　D. 1.5

第Ⅱ卷(非选择题,共110分)

得分	评卷人

二、填空题(11～20小题,每小题4分,共40分)

11. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\tan 2x}=$ ________.

12. 若 $f(x)$ 在 x_0 处可导,又 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=1$,则 $f(x_0)=$ ________.

13. 设曲线 $y=x^2+x-2$ 在点 M 处切线的斜率为2,则点 M 的坐标为________.

14. $y=x^2e^{\frac{1}{x}}-a^x(a>0,a\neq 1)$,则 $y'=$ ________.

15. $\int\frac{1}{x^2+2x+5}dx=$ ________.

16. $\int_0^{+\infty}\frac{x}{(1+x^2)^2}dx=$ ________.

17. 若 $f(x)$ 是奇函数,且 $\int_0^1 f(x)\,dx=1$,则 $\int_{-1}^0 f(x)\,dx=$ ________.

18. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{x+\frac{1}{2}}=$ ________.

19. 设 $z=(\sin x)^{\cos y}(0<x<\pi)$,则 $dz=$ ________.

20. 设 $z=\ln(x^2+y^2)$,则 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=$ ________.

天道酬勤 一心为您

得　分	评卷人

三、解答题(21～28题,共70分.解答应写出推理、演算步骤)

21.(本题满分8分)

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{a(1-\cos 2x)}{x^2}, & x<0,\\ 4, & x=0,\\ \dfrac{b\sin x+\int_0^x \cos t^2\,dt}{x}, & x>0\end{cases}$$ 在 $x=0$ 处连续,试确定 a,b 的值.

22.(本题满分8分)

求曲线 $y=\dfrac{\ln x}{x}$ 的水平渐近线和铅直渐近线.

23.(本题满分8分)

求$\displaystyle\int\frac{1}{\cos^2 x\sqrt{2+3\tan x}}dx$.

24.(本题满分8分)

求函数 $z=2x^3+3y^2$ 在 $x=10,y=8,\Delta x=0.2,\Delta y=0.3$ 时的全增量与全微分.

25.(本题满分8分)

某单位有3部汽车,每天每部车需检修的概率为$\frac{1}{5}$,各部车是否需检修是相互独立的,求一天内恰有2部车需检修的概率.

26.(本题满分10分)

已知函数 $y=f(x)$ 满足方程 $e^{xy}+\sin(x^2y)=y$,求 $y=f(x)$ 在点(0,1)处的切线方程.

27.(本题满分10分)

计算$\displaystyle\int e^{\sqrt{2x+1}}dx$.

28.(本题满分10分)

证明:$2^x>x^2(x>4)$.

考生诚信考试承诺

我已阅读成人高考考生(考场)有关规定,愿意在本场考试中自觉遵守。如有违反将接受处理。我保证本场考试中,本人所提供的个人信息是真实、准确的,并愿意承担相应的法律责任。

姓名______ 考号______ 科类______

★★★★ 密 封 线 内 不 要 答 题 ★★★★

天一文化 TIANYI CULTURE

天道酬勤 一心为您

绝密★启用前

全国各类成人高等学校招生考试专升本高等数学(二)

考前密押(一)

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分,满分 150 分,考试时间 120 分钟.

题号	一	二	三	总分	统分人签字
分数					

第Ⅰ卷(选择题,共 40 分)

得分	评卷人

一、选择题(1～10 小题,每小题 4 分,共 40 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}\ln(1+t)\mathrm{d}t}{x^4}=$ 【 】

A. ∞　B. 0　C. 1　D. $\frac{1}{2}$

2. 在 $\Delta y=\mathrm{d}y+\alpha$ 中 α 是 【 】

A. 无穷小量　B. 当 $\Delta x\to 0$ 时 α 是无穷小量

C. 当 $\Delta x\to 0$ 时 α 是 Δx 的高阶无穷小　D. $\alpha=0$

3. $y=x^x$,则 $\mathrm{d}y=$ 【 】

A. $x^x\mathrm{d}x$　B. $x^x(\ln x+1)\mathrm{d}x$　C. $x^x\ln x\mathrm{d}x$　D. $x^x(\ln x-1)\mathrm{d}x$

4. 曲线 $x^2+y^2=2x$ 在点(1,1)处的法线方程为 【 】

A. $x=1$　B. $y=1$　C. $y=x$　D. $y=0$

5. 设 $f(x)=\ln 2+\mathrm{e}^3$,则 $f'(x)=$ 【 】

A. $\frac{1}{2}+3\mathrm{e}^2$　B. 0　C. $\ln 2+\mathrm{e}^3$　D. $(\ln 2+3\mathrm{e}^2)$

6. $\lim\limits_{n\to\infty}3^n\tan\dfrac{x}{3^n}=$ 【 】

A. $\frac{x}{3}$　B. $3x$　C. x　D. 3

7. 函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+ax)}{x}, & -1<x<0,\\ x+1, & 0\leqslant x<3\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续,则 $a=$ 【 】

A. 1　B. 2　C. 3　D. 4

8. 曲线 $y=\sin x(0\leqslant x\leqslant\pi)$ 与 x 轴所围成的图形绕 x 轴旋转一周所成的立体体积为 【 】

A. 2　B. π　C. $\frac{1}{2}$　D. $\frac{\pi^2}{2}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{x^2\sin x}=$ 【 】

A. 0　B. ∞　C. $\frac{1}{3}$　D. 2

10. 设随机变量 X:0,1,2 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \frac{1}{3}, & 0\leqslant x<1,\\ \frac{1}{2}, & 1\leqslant x<2,\\ 1, & x\geqslant 2,\end{cases}$ 则 $P\{X=1\}=$ 【 】

A. $\frac{1}{2}$　B. $\frac{1}{6}$　C. $\frac{1}{3}$　D. $\frac{5}{6}$

第Ⅱ卷(非选择题,共 110 分)

得分	评卷人

二、填空题(11～20 小题,每小题 4 分,共 40 分)

11. $y=\sqrt{x+\sqrt{x}}$,则 $y'=$________.

12. 设 $f(x)=2^x,g(x)=x^2+1$,则 $f[g'(x)]=$________.

13. 设 $y=x\ln x$,则 $y^{(10)}=$________.

14. $\int_1^2\frac{1}{x^2}5^{\frac{1}{x}}\mathrm{d}x=$________.

15. $\int\mathrm{e}^{2x^2+\ln x}\mathrm{d}x=$________.

16. 设 $z=f(xy,x+y)$,则 $\frac{\partial z}{\partial x}=$________.

17. $\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=$________.

18. 已知 $\int f(x)\mathrm{d}x=\arctan x^2+C$,则 $f(x)=$________.

19. 设 $y+\ln y-2x\ln x=0$ 且函数 $y=y(x)$,则 $y'=$________.

20. 设 $z=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$,则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$________.

得分	评卷人

三、解答题(21 ～ 28 题,共 70 分.解答应写出推理、演算步骤)

21.(本题满分 8 分)

求$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{\sqrt{2-x}-\sqrt{x}}$.

22.(本题满分 8 分)

求$\int\sin\left(\dfrac{1}{2}\ln x\right)\mathrm{d}x$.

23.(本题满分 8 分)

求$\int_1^{\sqrt{2}}\dfrac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{4-x^2}}$.

24.(本题满分 8 分)

求函数 $z=x^2-xy+y^2+9x-6y+20$ 的极值.

25.(本题满分 8 分)

电路由两个并联电池 A 与 B,再与电池 C 串联而成,设电池 A、B、C 损坏的概率分别是 0.2,0.2,0.3,求电路发生间断的概率.

26.(本题满分 10 分)

求 $y=\dfrac{1}{1+x^2}$ 的单调区间、凸凹性区间及渐近线.

27.(本题满分 10 分)

设$\int xf(x)\mathrm{d}x=\arcsin x+C$,求$\int\dfrac{1}{f(x)}\mathrm{d}x$.

28.(本题满分 10 分)

设 z 是 x,y 的函数,且 $xy=xf(z)+y\varphi(z)$,$xf'(z)+y\varphi'(z)\neq0$,

证明:$[x-\varphi(z)]\dfrac{\partial z}{\partial x}=[y-f(z)]\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

★ ★ ★ ★ 密 封 线 内 不 要 答 题 ★ ★ ★ ★

考生诚信考试承诺

我已阅读成人高考考生(考场)有关规定,愿意在本场考试中自觉遵守;如有违反将接受处理。我保证本场考试中,本人所提供的个人信息是真实、准确的,并愿意承担相应的法律责任。

密封线内不要答题

科类________ 考号________ 姓名________

天道酬勤 一心为您

绝密★启用前

全国各类成人高等学校招生考试专升本高等数学(二)

考前密押(二)

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分。满分150分。考试时间120分钟。

题　号	一	二	三	总　分	统分人签字
分　数					

第Ⅰ卷(选择题,共40分)

得　分	评卷人

一、选择题(1～10小题,每小题4分,共40分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=$　【　】

A. 0　B. $\frac{1}{2}$　C. ∞　D. 1

2. 设 $z=\ln(x+y^2)$,则 $dz\big|_{(1,1)}=$　【　】

A. $\frac{1}{2}dx+dy$　B. $dx+\frac{1}{2}dy$

C. $dx+dy$　D. $\frac{1}{2}dx+\frac{1}{2}dy$

3. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & -1\leqslant x<0,\\ 2x-1, & 0\leqslant x<2,\end{cases}$ 则其连续区间为　【　】

A. $[-1,2]$　B. $[-1,0)\cup(0,2)$

C. $[-1,0]$　D. $[0,2)$

4. 设 $y=x^n$,n 为正整数,则 $y^{(n)}=$　【　】

A. 0　B. 1　C. n　D. $n!$

5. 设 $f(x)=x(x-1)$,则 $f(x)$ 的单调增加区间是　【　】

A. $(0,1)$　B. $\left(0,\frac{1}{2}\right)$

C. $\left(\frac{1}{2},1\right)$　D. 前三者均不正确

6. 函数 $y=x+\sqrt{x}$ 在区间 $[0,4]$ 上的最大值为　【　】

A. 0　B. 1　C. 6　D. $\frac{5}{4}$

7. 曲线 $y=x\arctan x$ 的凹区间为　【　】

A. $(0,+\infty)$　B. $(-\infty,0)$　C. $(-\infty,+\infty)$　D. 不存在

8. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}=P$,则 $P=$　【　】

A. $f'(x_0)$　B. $2f'(x_0)$　C. 0　D. 不存在

9. $f(x)=x-\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$ 的极值点有　【　】

A. 0个　B. 1个　C. 2个　D. 3个

10. 下列四个函数不能做随机变量 X 的分布函数的是　【　】

A. $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \frac{1}{3}, & 0\leqslant x<1,\\ \frac{1}{2} & 1\leqslant x<2,\\ 1 & x\geqslant 2\end{cases}$　B. $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \frac{1}{4}x^2, & 0\leqslant x<2,\\ 1, & x\geqslant 2\end{cases}$

C. $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1-e^{-x}, & x\geqslant 0\end{cases}$　D. $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \sin x, & x\geqslant 0\end{cases}$

第Ⅱ卷(非选择题,共110分)

得　分	评卷人

二、填空题(11～20小题,每小题4分,共40分)

11. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^x=$________.

12. 设 $f(x)=\frac{\sin x}{|x|}$,则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=$________.

13. $y=\cos 2x$ 在 $x=\frac{\pi}{6}$ 处的切线方程为________.

14. 设 $y=f(x^2)$,且 $f(x)$ 可导,则 $y'=$________.

15. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=$________.

16. $\int e^x(1+e^x)dx=$________.

17. 若 $\int f(x)dx=\sin x+C$,则 $\int f'(x)dx=$________.

18. $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(1+\ln x)^3}dx=$________.

19. 设 $z=2x^3y^2$,则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$________.

20. 设 $\arctan\frac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ 确定了 y 是 x 的函数,则 $y'=$________.

得　分	评卷人

三、解答题(21 ～ 28 题,共 70 分.解答应写出推理、演算步骤)

21.(本题满分 8 分)

由 $f(x)=\begin{cases}2-x, & x\leqslant 0,\\ \dfrac{2}{x}\ln(1+x), & 0<x\leqslant 1,\\ 2+(x-1)\sin\dfrac{1}{x-1}, & x>1,\end{cases}$

求 $f(x)$ 的间断点并指出其类别.

22.(本题满分 8 分)

设 $f(x)=\int_{x+1}^{x^2}e^{2t}\mathrm{d}t$,求 $f'(x)$.

23.(本题满分 8 分)

求$\int\sqrt{e^x-1}\,\mathrm{d}x$.

24.(本题满分 8 分)

设 $z=f(u)$,$u=xy+\dfrac{y}{x}$,f 是可微函数,求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$,$\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

25.(本题满分 8 分)

盒中有 5 个球,其中 3 个白球,2 个黑球,有放回地取两次,每次取一个,求取到白球数 X 的均值及方差.

26.(本题满分 10 分)

求 $f(x,y)=4(x-y)-x^2-y^2$ 的极值与极值点.

27.(本题满分 10 分)

平面图形 D 由曲线 $y=\sqrt{x}$,直线 $y=x-2$ 及 x 轴围成,求此平面图形绕 x 轴旋转一周所围成的旋转体的体积.

28.(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续,且 $f(x)>0$,$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t-\int_x^b\dfrac{1}{f(t)}\mathrm{d}t$.

证明:

(1)$F'(x)>0$;

(2)$F(x)=0$ 在$[a,b]$内有唯一实根.

参考答案及解析

全真模拟(一)

一、选择题

1.【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了极限的知识点.

【应试指导】 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\arctan x}{x}=0$ （$\arctan x$是有界函数），

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x}=1$（用无穷小代换：$\arctan x\sim x(x\to 0)$），

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+1}{3x+5}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2+\frac{1}{x}}{3+\frac{5}{x}}=\dfrac{2}{3}$，

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0\left(x\to\infty \text{ 时}\dfrac{1}{x}\text{为无穷小量，而} \sin x \text{是有界函数，注意}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1\right)$.

2.【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了函数在一点可导、连续的性质的知识点.

【应试指导】 从四个选项的内容来看，我们可以一步一步地处理，$x=0$ 时，$y=1$，

$\lim\limits_{x\to 0}(|x|+1)=1$，故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

y 在 $x=0$ 的可导性可从左右导数出发进行讨论.

$f'_-(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{-\Delta x}{\Delta x}=-1$，

$f'_+(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{\Delta x}{\Delta x}=1$，

由于 $f'_+(0)\neq f'_-(0)$，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导，故应选 C.

3.【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了函数的单调性的知识点.

【应试指导】 因为 $y=\dfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})$，所以 $y'=\dfrac{1}{2}(e^x-e^{-x})$，令 $y'=0$，得 $x=0$；当 $x>0$ 时，$y'>0$；当 $x<0$ 时，$y'<0$，故在$(-1,1)$内，函数有增有减.

4.【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了函数的凸区间的知识点.

【应试指导】 因为 $f(x)=x^4-24x^2+6x$，则 $f'(x)=4x^3-48x+6$，$f''(x)=12x^2-48=12(x^2-4)$，令 $f''(x)<0$，有 $x^2-4<0$，于是 $-2<x<2$，即凸区间为$(-2,2)$.

5.【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了定积分的换元积分法的知识点.

【应试指导】 解法 1：

$\int_0^4\dfrac{1}{\sqrt{x}}f(\sqrt{x})\mathrm{d}x=\int_0^4 f(\sqrt{x})\cdot 2\mathrm{d}(\sqrt{x})=2\times\dfrac{1}{2}x^2\Big|_0^4=16.$

解法 2：

因 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\dfrac{x^4}{2}$，于是 $f(x)=2x^3$，从而 $\int_0^4\dfrac{1}{\sqrt{x}}f(\sqrt{x})\mathrm{d}x=\int_0^4\dfrac{1}{\sqrt{x}}\cdot 2\cdot x^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x=2\int_0^4 x\mathrm{d}x=x^2\Big|_0^4=16.$

6.【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了定积分的知识点.

【应试指导】 解法 1：

因 $f(x)=\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$ 为奇函数，故由积分性质知，

$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}x=0.$

解法 2：

$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}x=-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1}{1+\cos x}\mathrm{d}(1+\cos x)=-\ln(1+\cos x)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=0.$

7.【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了无穷区间的反常积分的知识点.

【应试指导】 因 $\int_{-\infty}^0 e^{kx}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{k}e^{kx}\Big|_{-\infty}^0=\begin{cases}\dfrac{1}{k}, & k>0,\\ \infty, & k\leqslant 0,\end{cases}$ 故 $k>0$，由题意知 $\dfrac{1}{k}=\dfrac{1}{3}$，从而 $k=3$.

8.【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了二元函数的一阶偏导数的知识点.

【应试指导】 因 $z=xe^{xy}$，所以 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=e^{xy}+x\cdot e^{xy}\cdot y=(1+xy)e^{xy}$.

9.【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了二元函数的一点处的一阶偏导数的知识点.

【应试指导】 由 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{xy}\cdot x+e^{x^2y}\cdot x^2$，则 $\dfrac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(1,2)}=\dfrac{1}{2}+e^2$.

注：也可先将 $x=1$ 代入，则 $z\Big|_{(1,y)}=\ln y+e^y$，则 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{y}+e^y$，所以 $\dfrac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(1,2)}=\dfrac{1}{2}+e^2$.

10.【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了古典概率的知识点.

【应试指导】 因两封信投向四个邮筒共有的投法（可重复排列）为 $n=4^2=16$；满足1，2号邮筒各有一封信的投法为 $k=A_2^2=2$，故所求概率为 $P=\dfrac{k}{n}=\dfrac{2}{16}=\dfrac{1}{8}$.

二、填空题

11.【答案】 e^{-6}

【考情点拨】 本题考查了 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$ 的应用的知识点.

【应试指导】 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^{3x}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{-\frac{x}{2}}\right)^{-\frac{x}{2}\cdot(-6)}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{-\frac{x}{2}}\right)^{-\frac{x}{2}}\right]^{-6}$

$=e^{-6}$.

12.【答案】 $\dfrac{1}{2}$

【考情点拨】 本题考查了一元函数在一点处的一阶导数的知识点.

【应试指导】 由 $y'=\dfrac{1}{1+(e^x)^2}\cdot e^x$，令 $x=0$，则 $y'\Big|_{x=0}=\dfrac{1}{2}$.

13.【答案】 $-\dfrac{1}{2}$

【考情点拨】 本题考查了隐函数在一点处的一阶导数的知识点.

【应试指导】 $x^2+2xy-y^2=2x$ 两边对 x 求导（注意 y 是 x 的函数），

因 $2x+2y+2xy'-2yy'=2$，

故 $y'=\dfrac{2-2x-2y}{2x-2y}=\dfrac{1-x-y}{x-y}$.

令 $x=2$，且 $y\Big|_{x=2}=0$，则 $y'\Big|_{x=2}=-\dfrac{1}{2}$.

14.【答案】 $y=1$

【考情点拨】 本题考查了曲线上一点处的切线方程的知识点.

【应试指导】 由 $x^2+y^2=2x$，两边对 x 求导得 $2x+2yy'=2$，取 $x=1$，$y=1$，则 $y'\Big|_{x=1}=0$，所以切线方程为 $y=1$.

15.【答案】 (1,1)

【考情点拨】 本题考查了曲线的拐点的知识点.

【应试指导】 $y'=3x^2-6x+2$，$y''=6x-6$，令 $y''=0$，得 $x=1$. 则当 $x>1$ 时，$y''>0$；当 $x<1$ 时，$y''<0$. 又因 $x=1$ 时 $y=1$，故点(1,1)是拐点（因 $y=x^3-3x^2+2x+1$ 在$(-\infty,+\infty)$上处处有二阶导数，故没有其他形式的拐点）.

16.【答案】 $\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-x+2x^{\frac{1}{2}}-\ln|x|+C$

【考情点拨】 本题考查了不定积分的知识点.

【应试指导】 $\int(\sqrt{x}-1)\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$

$=\int(x^{\frac{1}{2}}-1+x^{-\frac{1}{2}}-x^{-1})\mathrm{d}x$

$=\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-x+2x^{\frac{1}{2}}-\ln|x|+C.$

17.【答案】 $-\dfrac{2}{3}\cos^3x+C$

【考情点拨】 本题考查了不定积分的知识点.

【应试指导】 $\int\sin 2x\cos x\mathrm{d}x=\int 2\sin x\cos^2x\mathrm{d}x$

$=-\int 2\cos^2x\mathrm{d}\cos x$

$=-2\times\dfrac{1}{3}\cos^3x+C=-\dfrac{2}{3}\cos^3x+C.$

18.【答案】 $\dfrac{2}{27}$

【考情点拨】 本题考查了定积分的知识点.

【应试指导】 $\int_{-1}^1\dfrac{x}{\sqrt{10-6x}}\mathrm{d}x$

$=\int_{-1}^1\left(-\dfrac{1}{6}\right)\cdot\dfrac{-6x}{\sqrt{10-6x}}\mathrm{d}x$

$=-\dfrac{1}{6}\int_{-1}^1\dfrac{-6x+10-10}{\sqrt{10-6x}}\mathrm{d}x$

$=-\dfrac{1}{6}\int_{-1}^1\sqrt{10-6x}\mathrm{d}x+\dfrac{10}{6}\int_{-1}^1\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{10-6x}}$

$=-\dfrac{1}{6}\int_{-1}^1\left[-\dfrac{1}{6}(10-6x)^{\frac{1}{2}}\right]\mathrm{d}(10-6x)+\dfrac{10}{6}\int_{-1}^1\left[-\dfrac{1}{6}(10-6x)^{-\frac{1}{2}}\right]\mathrm{d}(10-6x)$

$=\dfrac{1}{36}\times\dfrac{2}{3}(10-6x)^{\frac{3}{2}}\Big|_{-1}^1-\dfrac{10}{36}\times 2(10-6x)^{\frac{1}{2}}\Big|_{-1}^1$

$=\dfrac{1}{54}\times(8-64)-\dfrac{5}{9}\times(2-4)=\dfrac{2}{27}.$

注：本题可另解如下：令 $\sqrt{10-6x}=t$，则 $x=\dfrac{1}{6}(10-t^2)$.

所以 $\int_{-1}^1\dfrac{x}{\sqrt{10-6x}}\mathrm{d}x$

$=\int_4^2\dfrac{\frac{1}{6}(10-t^2)}{t}\cdot\dfrac{1}{6}\cdot(-2t)\mathrm{d}t$

$$=\frac{1}{18}\int_2^4(10-t^2)\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{18}\left(10t-\frac{1}{3}t^3\right)\Big|_2^4$$
$$=\frac{1}{18}\times\left(40-\frac{64}{3}-20+\frac{8}{3}\right)=\frac{2}{27}.$$

19.【答案】1

【考情点拨】本题考查了定积分的分部积分法的知识点.

【应试指导】$\int_1^e \ln x\mathrm{d}x = x\ln x\Big|_1^e-\int_1^e x\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x = e-(e-1)=1.$

20.【答案】$-\frac{e^y}{(x+e^y)^2}$

【考情点拨】本题考查了二元函数的混合偏导数的知识点.

【应试指导】因 $z=\ln(x+e^y)$，则 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{x+e^y}$，

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{-e^y}{(x+e^y)^2}.$

三、解答题

21. 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2(1+\sqrt{1-x^2})}{(1-\sqrt{1-x^2})(1+\sqrt{1-x^2})}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2(1+\sqrt{1-x^2})}{x^2}$

$=2.$

注：本题也可用洛必达法则求解.

原式 $=\lim\limits_{x\to0}\frac{2x}{-\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}=\lim\limits_{x\to0}2\sqrt{1-x^2}=2.$

本题还可用变量代换求解如下：令 $\sqrt{1-x^2}=t$，

原式 $=\lim\limits_{t\to1}\frac{1-t^2}{1-t}=\lim\limits_{t\to1}(1+t)=2.$

22. 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x}{e^x+e^x+xe^x}=\frac{1}{2}.$

23. $\int_0^{+\infty}xe^{-x}\mathrm{d}x=\lim\limits_{a\to+\infty}\int_0^a xe^{-x}\mathrm{d}x=-\lim\limits_{a\to+\infty}\int_0^a x\mathrm{d}e^{-x}$

$=\lim\limits_{a\to+\infty}(-ae^{-x})\Big|_0^a+\lim\limits_{a\to+\infty}\int_0^a e^{-x}\mathrm{d}x$

$=\lim\limits_{a\to+\infty}(-ae^{-a})+\lim\limits_{a\to+\infty}(-e^{-x})\Big|_0^a$

$=\lim\limits_{a\to+\infty}(1-e^{-a})=1.$

24. 由 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{x^2}f(xy)+\frac{1}{x}f'(xy)\cdot y+yf'(x+y)$，

则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{1}{x^2}f'(xy)\cdot x+\frac{1}{x}[f'(xy)+yf''(xy)\cdot x]+f'(x+y)+yf''(x+y)$

$=yf''(xy)+f'(x+y)+yf''(x+y).$

25. 依题意，随机变量 X 只能取值3,4,5；且 $P\{X=3\}=\frac{1}{C_5^3}=\frac{1}{10}$；

$P\{X=4\}=\frac{C_3^2}{C_5^3}=\frac{3}{10}$；$P\{X=5\}=\frac{C_4^2}{C_5^3}=\frac{6}{10}$.

所以 X 的概率分布为

X	3	4	5
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$

26. $y'=6x^2-6x-12$，$y''=12x-6$，

令 $y'=0$ 得驻点 $x_1=-1$，$x_2=2$，

当 $x_2=2$ 时，$y''=18>0$. 所以 $f(x)$ 在 $x=2$ 处取极小值 -6.

当 $x_1=-1$ 时，$y''<0$. 所以 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处取极大值21.

又令 $y''=0$，得 $x=\frac{1}{2}$，$x<\frac{1}{2}$ 时，$y''<0$，从而曲线为凸的，即函数曲线的凸区间为 $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$；$x>\frac{1}{2}$ 时，$y''>0$，从而曲线为凹的，即函数曲线的凹区间为 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$；又因 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{15}{2}$，故曲线的拐点为 $\left(\frac{1}{2},\frac{15}{2}\right)$.

27. 由 $\frac{\partial z}{\partial x}=\cos(xy^2)\cdot y^2+e^{x^2y}\cdot 2xy$，

$\frac{\partial z}{\partial y}=\cos(xy^2)\cdot 2xy+e^{x^2y}\cdot x^2$，

所以 $\mathrm{d}z=[y^2\cos(xy^2)+2xye^{x^2y}]\mathrm{d}x+[2xy\cos(xy^2)+x^2e^{x^2y}]\mathrm{d}y.$

28. 证法1：在 $[0,x]$ 上令 $F(x)=e^x$，则使用拉格朗日定理得，

$F(x)-F(0)=F'(\xi)(x-0)$，$\xi\in(0,x)$，即

$e^x-1=e^\xi\cdot x$，

由于 $e^\xi>1$，所以 $e^x-1>x$，即 $e^x>1+x$.

证法2：令 $G(x)=e^x-1-x$，则 $G'(x)=e^x-1$，

故在 $[0,x]$ 内 $G'(x)>0$，

所以在 $[0,x]$ 上 $G(x)$ 单调递增，由 $G(0)=0$，得 $x>0$ 时，$G(x)>0$，

即 $e^x-1-x>0$，亦即 $e^x>1+x$.

全真模拟(二)

一、选择题

1.【答案】C

【考情点拨】本题考查了无穷小量的知识点.

【应试指导】经实际计算及无穷小量定义知应选C.

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to0}\ln|x|=-\infty$，

$\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{1+x}=0$，$\lim\limits_{x\to0}\cot x=\infty$.

注：先观察四个选项，从已知极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$，先把A排除，再利用 $\ln x$ 的性质可把B排除，C自然可验证是正确的，由 $\cot x$ 的性质，可排除D项.

2.【答案】C

【考情点拨】本题考查了曲线上一点处的切线的知识点.

【应试指导】由 $y=x^3-3x$ 得 $y'=3x^2-3$，令 $y'=0$，得 $x=\pm1$. 经计算 $x=-1$ 时，$y=2$；$x=1$ 时，$y=-2$，故选C.

3.【答案】B

【考情点拨】本题考查了复合函数的微分的知识点.

【应试指导】因为 $y=f(e^x)$，所以，$y'=f'(e^x)e^x\mathrm{d}x$.

4.【答案】B

【考情点拨】本题考查了利用定义求函数的一阶导数的知识点.

【应试指导】因 $\lim\limits_{h\to0}\frac{h}{f(x_0-2h)-f(x_0)}=\frac{1}{\lim\limits_{h\to0}\frac{f(x_0-2h)-f(x_0)}{h}}=\frac{1}{-2f'(x_0)}=\frac{1}{4}$，

于是 $f'(x_0)=-2$.

5.【答案】C

【考情点拨】本题考查了函数的单调性和凹凸性的知识点.

【应试指导】因 $f'(x)>0$，故函数单调递增，又 $f''(x)<0$，所以函数曲线为凸的.

6.【答案】B

【考情点拨】本题考查了曲线的拐点的知识点.

【应试指导】因 $y=(x-1)^3-1$，$y'=3(x-1)^2$，$y''=6(x-1)$. 令 $y''=0$ 得 $x=1$，当 $x<1$ 时，$y''<0$；当 $x>1$ 时，$y''>0$. 又因 $y\Big|_{x=1}=-1$，于是曲线有拐点 $(1,-1)$.

7.【答案】D

【考情点拨】本题考查了不定积分的知识点.

【应试指导】因 $\int f(x)\mathrm{d}x=\ln(x+\sqrt{1+x^2})+C$，所以 $f(x)=[\ln(x+\sqrt{1+x^2})+C]'=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$

8.【答案】C

【考情点拨】本题考查了无穷区间的反常积分的敛散性的知识点.

【应试指导】对于选项A：$\int_1^{+\infty}\cos x\mathrm{d}x=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_1^b\cos x\mathrm{d}x=\lim\limits_{b\to+\infty}(\sin b-\sin1)$ 不存在，此积分发散；对于选项B：$\int_1^{+\infty}e^x\mathrm{d}x=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_1^b e^x\mathrm{d}x=\lim\limits_{b\to+\infty}(e^b-e)$ 不存在，此积分发散；对于选项C：$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^3}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2x^2}\Big|_1^{+\infty}=\frac{1}{2}$，此积分收敛；对于选项D：$\int_1^{+\infty}\ln x\mathrm{d}x=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_1^b\ln x\mathrm{d}x=\lim\limits_{b\to+\infty}\left[(x\ln x)-x\Big|_1^b\right]=\lim\limits_{b\to+\infty}(b\ln b-b+1)$ 不存在，此积分发散.

9.【答案】A

【考情点拨】本题考查了二元函数的全微分的知识点.

【应试指导】由 $\frac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=x^y\cdot\ln x$，所以

$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y=yx^{y-1}\mathrm{d}x+x^y\ln x\mathrm{d}y$，故选A.

10.【答案】A

【考情点拨】本题考查了条件概率的知识点.

【应试指导】设 $A=\{$该建筑物使用寿命超过50年$\}$，$B=\{$该建筑物使用寿命超过60年$\}$

由题意，$P(A)=0.8$，$P(B)=0.6$，所求概率为：

$P(\overline{B}|A)=1-P(B|A)=1-\frac{P(AB)}{P(A)}=1-\frac{P(B)}{P(A)}$

$=1-\frac{0.6}{0.8}=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}=0.25.$

二、填空题

11.【答案】0

【考情点拨】本题考查了极限的知识点.

【应试指导】$\lim\limits_{x\to\sqrt3}\frac{x^2-2\sqrt3x+3}{x^2-3}$

$=\lim\limits_{x\to\sqrt3}\frac{(x-\sqrt3)^2}{(x-\sqrt3)(x+\sqrt3)}$

$=\lim\limits_{x\to\sqrt3}\frac{x-\sqrt3}{x+\sqrt3}=0.$

12.【答案】mk

【考情点拨】本题考查了函数在一点处连续的知识点.

【应试指导】$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\ln(1+kx)^{\frac{m}{x}}$

$=\lim\limits_{x\to0}\ln(1+kx)^{\frac{1}{kx}\cdot km}$

$=\ln e^{km}=km$，

所以当 $f(0)=km$ 时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

13.【答案】-1

【考情点拨】本题考查了利用导数定义求极限的知识点.

【应试指导】$\lim\limits_{h\to\infty}hf\left(x_0-\frac{1}{h}\right)$

$=-\lim\limits_{h\to\infty}\frac{f\left(x_0-\frac{1}{h}\right)-f(x_0)}{-\frac{1}{h}}$

$=-\lim\limits_{t\to0}\frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t}$

$=-f'(x_0)=-1.$

注：注意导数定义的结构特点.

$f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$

14.【答案】$2x\cos x-x^2\sin x+2^x\ln2$

【考情点拨】本题考查了一元函数的一阶导数的知识点.

【应试指导】$(x^2\cos x)'=2x\cos x-x^2\sin x$，

$(2^x)'=2^x\cdot\ln2,e'=0$,

所以 $y'=2x\cos x-x^2\sin x+2^x\ln2$.

15.【答案】0

【考情点拨】本题考查了定积分的知识点.

【应试指导】因函数 $f(x)=\frac{x^2\sin x}{1+x^2}$ 在$[-1,1]$上是奇函数,因此 $\int_{-1}^{1}\frac{x^2\sin x}{1+x^2}dx=0$.

注:奇函数在对称区间上积分的性质是常考题目之一,应注意.

16.【答案】1

【考情点拨】本题考查了洛必达法则的知识点.

【应试指导】$\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^x\cos^2t\,dt}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos^2x}{1}=1$.

17.【答案】$\frac{1}{x}+C$

【考情点拨】本题考查了不定积分的知识点.

【应试指导】$\int\frac{f'(\ln x)}{x}dx$

$=\int f'(\ln x)d\ln x$

$\xlongequal{u=\ln x}\int f'(u)du$

$=f(u)+C$

$=e^{-u}+C$

$=e^{-\ln x}+C$

$=\frac{1}{x}+C$.

本题也可另解如下:

由 $f(x)=e^{-x}$ 得 $f'(x)=-e^{-x}$,

所以 $f'(\ln x)=-e^{-\ln x}=-\frac{1}{x}$,

故 $\int\frac{f'(\ln x)}{x}dx=\int-\frac{1}{x^2}dx=\frac{1}{x}+C$.

18.【答案】$-2xy\sin(xy^2)$

【考情点拨】本题考查了二元函数的一阶偏导数的知识点.

【应试指导】因 $z=\cos(xy^2)$,故 $\frac{\partial z}{\partial y}=-\sin(xy^2)\cdot(xy^2)'=-2xy\sin(xy^2)$.

19.【答案】$\frac{2(x-2y)(x+3y)}{(2x+y)^2}$

【考情点拨】本题考查了二元函数的一阶偏导数的知识点.

【应试指导】$z=\frac{(x-2y)^2}{2x+y}$,

则 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2(x-2y)\cdot(2x+y)-2(x-2y)^2}{(2x+y)^2}$

$=\frac{2(x-2y)(2x+y-x+2y)}{(2x+y)^2}$

$=\frac{2(x-2y)(x+3y)}{(2x+y)^2}$.

20.【答案】$(1+xe^y)e^{y+xe^y}$

【考情点拨】本题考查了二元函数的混合偏导数的知识点.

【应试指导】因 $z=e^{xe^y}$,于是

$\frac{\partial z}{\partial x}=e^{xe^y}\cdot e^y$;

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=e^{xe^y}\cdot xe^y\cdot e^y+e^{xe^y}\cdot e^y$

$=(1+xe^y)e^{y+xe^y}$.

三、解答题

21. 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-e^{-x}}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x+e^{-x}}{2}=1$.

注:将分母 $\sin^2x$ 用与之等价的无穷小量 x^2 代换,这是一个技巧.

22. $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\left(\frac{1}{x}\sin ax+1\right)$

$=\lim\limits_{x\to0^-}\left(a\cdot\frac{\sin ax}{ax}+1\right)=a+1$,

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(x\cdot\sin\frac{1}{x}+b)=b$,

因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,则 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=f(0)$,

即 $a+1=b=2$,即 $a=1,b=2$.

23. $y'=-\frac{\sin x}{\cos x}=-\tan x,y''=-\sec^2x$

所以 $y''(0)=-1$.

24. $\int\frac{1+\sin2x}{\sin x+\cos x}dx=\int\frac{(\sin x+\cos x)^2}{\sin x+\cos x}dx$

$=\int(\sin x+\cos x)dx$

$=-\cos x+\sin x+C$.

25. 由题意,X 的所有可能的取值为1,2,3,

$X=1$,即第一次就取到正品,$P\{X=1\}=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}$;

$X=2$,即第一次取到次品且第二次取到正品,

$P\{X=2\}=\frac{2}{12}\times\frac{10}{11}=\frac{5}{33}$;

同理,$P\{X=3\}=\frac{2}{12}\times\frac{1}{11}\times\frac{10}{10}=\frac{1}{66}$,

故 X 的概率分布如下

X	1	2	3
P	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{33}$	$\frac{1}{66}$

26. $y'=8x^3-24x,y''=24x^2-24$,令 $y'=0$,得 $x=\pm\sqrt{3}$ 或 $x=0$.

令 $y''=0$,得 $x=\pm1$;$x<-\sqrt{3}$ 时,$y'<0$;$-\sqrt{3}<x<0$ 时,$y'>0$;

$0<x<\sqrt{3}$ 时,$y'<0$;$x>\sqrt{3}$ 时,$y'>0$.

于是,函数的递增区间为$(-\sqrt{3},0)$和$(\sqrt{3},+\infty)$;递减区间为$(-\infty,-\sqrt{3})$和$(0,\sqrt{3})$;有极小值

$f(\pm\sqrt{3})=-18$,有极大值 $f(0)=0$.

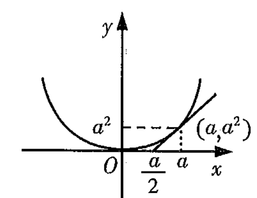
又因当 $-\infty<x<-1$ 时,$y''>0$,则 y 为凹函数;

当 $-1<x<1$ 时,$y''<0$,则 y 为凸函数;

当 $1<x<+\infty$ 时,$y''>0$,则 y 为凹函数.

综上得函数 y 的凹区间为$(-\infty,-1)$和$(1,+\infty)$,凸区间为$(-1,1)$,且拐点为$(-1,-10)$和$(1,-10)$.

27. 如图所示,在 $x=a$ 处切线的斜率为 $y'\big|_{x=a}=2a$,切线方程为 $y-a^2=2a(x-a)$,



即 $y=2ax-a^2$,

$S=\int_0^{a^2}\left(\frac{y+a^2}{2a}-\sqrt{y}\right)dy$

$=\frac{1}{2a}\left(\frac{y^2}{2}+a^2y\right)\Big|_0^{a^2}-\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{a^2}=\frac{1}{12}a^3$.

28. 等式两边对 x 求导,将 y 看做常数,则 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{4x+2y-2}{4-2z}=\frac{2x+y-1}{2-z}$,

同理 $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y+2x-2}{4-2z}=\frac{x+y-1}{2-z}$,

所以 $dz=\frac{1}{2-z}[(2x+y-1)dx+(y+x-1)dy]$.

全真模拟(三)

一、选择题

1.【答案】C

【考情点拨】本题考查了无穷小量的知识点.

【应试指导】由 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x+\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)=2$,所以 $x\to0$ 时,$x+\sin x$ 与 x 是同阶但非等价无穷小.

2.【答案】B

【考情点拨】本题考查了极限的知识点.

【应试指导】对于选项A:$\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\sin x}=1\neq0$,错误;对于选项B:$\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\sin x}=1$,正确;对于选项C:$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{\sin x}=\infty\neq1$,错误;对于选项D:$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0\neq1$,错误.

3.【答案】C

【考情点拨】本题考查了利用导数定义求极限的知识点.

【应试指导】因 $f'(1)=1$,于是 $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\cdot\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}f'(1)=\frac{1}{2}$.

4.【答案】B

【考情点拨】本题考查了已知导函数求原函数的知识点.

【应试指导】因 $f'(\cos^2x)=\sin^2x=1-\cos^2x$,于是 $f'(x)=1-x$,两边积分得 $f(x)=x-\frac{1}{2}x^2+C$,又 $f(0)=0$,故 $f(x)=x-\frac{1}{2}x^2$.

5.【答案】B

【考情点拨】本题考查了不定积分的换元积分法的知识点.

【应试指导】$\int\cos xf(\sin x)dx$

$=\int f(\sin x)d\sin x\xlongequal{u=\sin x}\int f(u)du$

$=F(u)+C=F(\sin x)+C$.

6.【答案】C

【考情点拨】本题考查了定积分的相关知识的知识点.

【应试指导】由题意知,C 项不成立,其余各项均成立.

7.【答案】D

【考情点拨】本题考查了无穷区间反常积分的发散性的知识点.

【应试指导】对于选项A:$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{x}\Big|_2^{+\infty}=\frac{1}{2}$,此积分收敛;

对于选项B:$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln^2x}dx=-\frac{1}{\ln x}\Big|_2^{+\infty}=\frac{1}{\ln2}$,此积分收敛;

对于选项C:$\int_{-\infty}^0e^xdx=e^x\Big|_{-\infty}^0=1$,此积分收敛;

对于选项D:$\int_{-\infty}^0e^{-x}dx=-e^{-x}\Big|_{-\infty}^0=-1+\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}$,该极限不存在,故此积分发散.

8.【答案】C

【考情点拨】本题考查了二元函数的一阶偏导数的知识点.

【应试指导】因 $z=\ln\frac{y}{x}$,于是 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{y}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)=-\frac{1}{x}$.

9.【答案】B

【考情点拨】本题考查了二元函数的全微分的知识点.

【应试指导】因 $z=x^3e^{y^2}$,于是 $\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2e^{y^2}$,$\frac{\partial z}{\partial y}=2x^3ye^{y^2}$,故 $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=3x^2e^{y^2}dx+2x^3ye^{y^2}dy=x^2e^{y^2}(3dx+2xydy)$.

10.【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了条件概率的知识点.

【应试指导】 设 $A_1=\{$甲射中目标$\}$,$A_2=\{$乙射中目标$\}$,$B=\{$目标被命中$\}$.

由题意,$P(A_1)=0.6$,$P(A_2)=0.5$,$B=A_1\cup A_2$,

$P(B)=1-P(\overline{A_1\cup A_2})=1-P(\overline{A_1})\cdot P(\overline{A_2})=1-(1-0.6)(1-0.5)=0.8$;

故所求概率为 $P(A_1\mid B)=\dfrac{P(A_1B)}{P(B)}=\dfrac{P(A_1)}{P(B)}=\dfrac{0.6}{0.8}=0.75$.

二、填空题

11.【答案】 $\dfrac{1}{2}$

【考情点拨】 本题考查了极限的知识点.

【应试指导】 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\frac{2}{x}}{\sin\frac{4}{x}}\xlongequal{u=\frac{1}{x}}\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\sin 2u}{\sin 4u}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$.

12.【答案】 6

【考情点拨】 本题考查了函数在一点外连续的知识点.

【应试指导】 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}e^x=1$,

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{a+x^2}{6}=\dfrac{a}{6}$,

又因 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续,则应有 $1=\dfrac{a}{6}$,故 $a=6$.

13.【答案】 $\dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\sin e^{\frac{1}{x}}dx$

【考情点拨】 本题考查了一元函数的微分的知识点.

【应试指导】 由 $y=\cos e^{\frac{1}{x}}$,

所以 $dy=-\sin e^{\frac{1}{x}}\cdot e^{\frac{1}{x}}\cdot\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)dx$

$=\dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\cdot\sin e^{\frac{1}{x}}dx$.

14.【答案】 e^6

【考情点拨】 本题考查了 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=e$ 的应用的知识点.

【应试指导】 $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{3}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}\cdot 6}=e^6$.

15.【答案】 $-\dfrac{1}{y^2}e^{\frac{x}{y}}\left(1+\dfrac{x}{y}\right)$

【考情点拨】 本题考查了二元函数的混合偏导数的知识点.

【应试指导】 由 $z=e^{\frac{x}{y}}$,则$\dfrac{\partial z}{\partial x}=e^{\frac{x}{y}}\cdot\dfrac{1}{y}$,

故 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\dfrac{1}{y^2}e^{\frac{x}{y}}+\dfrac{1}{y}e^{\frac{x}{y}}\cdot\left(-\dfrac{x}{y^2}\right)=-e^{\frac{x}{y}}\left(\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{x}{y^3}\right)=-\dfrac{1}{y^2}e^{\frac{x}{y}}\left(1+\dfrac{x}{y}\right)$.

16.【答案】 $-2e^{\pi}$

【考情点拨】 本题考查了一元函数在一点处的一阶导数的知识点.

【应试指导】 由 $y'=e^{2\arccos x}\cdot 2\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$,

故 $y'\Big|_{x=0}=-2e^{\pi}$.

17.【答案】 1

【考情点拨】 本题考查了定积分的知识点.

【应试指导】 $\int_0^2|x-1|dx$

$=\int_0^1(1-x)dx+\int_1^2(x-1)dx$

$=1-\dfrac{x^2}{2}\Big|_0^1+\dfrac{1}{2}x^2\Big|_1^2-1=1$.

注:绝对值函数的积分必须分段进行.

18.【答案】 $x-\arctan x+C$

【考情点拨】 本题考查了不定积分的知识点.

【应试指导】

$\int\dfrac{x^2}{1+x^2}dx=\int\dfrac{x^2+1-1}{1+x^2}dx=\int\left(1-\dfrac{1}{1+x^2}\right)dx$

$=x-\arctan x+C$.

19.【答案】 $\dfrac{1}{5}\tan 5x+C$

【考情点拨】 本题考查了不定积分的换元积分法的知识点.

【应试指导】 $\int\sec^2 5x dx$

$=\dfrac{1}{5}\int\sec^2 5x d5x\xlongequal{u=5x}\dfrac{1}{5}\int\sec^2 u du$

$=\dfrac{1}{5}\tan u+C=\dfrac{1}{5}\tan 5x+C$.

20.【答案】 -3

【考情点拨】 本题考查了函数的一阶导数的知识点.

【应试指导】 因 $f(x)$ 是偶函数,故 $f'(x)$ 是奇函数,所以 $f'(-1)=-f'(1)$,

即 $f'(1)=-f'(-1)=-3$.

三、解答题

21. 由$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+ax+b}{x-1}=5$,且当 $x\to 1$ 时,$x-1\to 0$,

故必须有

$\lim\limits_{x\to 1}(x^2+ax+b)=0$,即 $a+b+1=0$.

将 $b=-a-1$ 代入,有

$5=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+ax-a-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+a+1)}{x-1}=a+2$,

所以 $a=3$,$b=-4$.

22. 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+\sin x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+\cos x}{1}=2$.

23. $y'=\cos\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}}\cdot\dfrac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2}$

$=\cos\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}}\cdot\dfrac{-2}{(1+x)^2}$

$=\dfrac{-1}{(1+x)^2\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}}\cdot\cos\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$.

24. 由$\dfrac{\arctan x}{1+x^2}dx=\arctan x d\arctan x$,则

$\int\dfrac{x+\arctan x}{1+x^2}dx=\int\dfrac{x}{1+x^2}dx+\int\dfrac{\arctan x}{1+x^2}dx$

$=\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)+\int\arctan x d\arctan x$

$=\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)+\dfrac{1}{2}(\arctan x)^2+C$.

25. 等式两边对 x 求导,有

$f(x+1)=e^{x+1}+xe^{x+1}=(1+x)e^{x+1}$,

所以 $f(x)=xe^x$,因此 $f'(x)=e^x+xe^x$.

26. 令 $y'=6x^2-6x=0$,得 $x=0$ 或 $x=1$,

$y''=12x-6=0$,得 $x=\dfrac{1}{2}$.

	$(-\infty,0)$	0	$\left(0,\frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2},1\right)$	1	$(1,+\infty)$
y'	+	0	−		−	0	+
y''	−		−	0	+		+
y	↗		↘		↘		↗

所以函数 y 的单调增区间为 $(-\infty,0)$ 和 $(1,+\infty)$,单调减区间为 $(0,1)$;

函数 y 的凸区间为 $\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right)$,凹区间为 $\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$.

故 $x=0$ 时,函数有极大值 0,$x=1$ 时,函数有极小值 -1,且点 $\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$ 为拐点,因 $\lim\limits_{x\to\infty}(2x^3-3x^2)$ 不存在,且 $y=2x^3-3x^2$ 没有无意义的点,故函数没有渐近线.

27. 由题意,X 的可能取值为 0,1,2,3. $X=0$,即第一次就取到合格品,没有取到次品,$P\{X=0\}=\dfrac{10}{13}$;$X=1$,即第一次取到次品,第二次取到合格品,$P\{X=1\}=\dfrac{3}{13}\times\dfrac{10}{12}=\dfrac{5}{26}$;同理,$P\{X=2\}=\dfrac{3}{13}\times\dfrac{2}{12}\times\dfrac{10}{11}=\dfrac{5}{143}$;

$P\{X=3\}=\dfrac{3}{13}\times\dfrac{2}{12}\times\dfrac{1}{11}\times\dfrac{10}{10}=\dfrac{1}{286}$.

所以 X 的概率分布为

X	0	1	2	3
P	$\frac{10}{13}$	$\frac{5}{26}$	$\frac{5}{143}$	$\frac{1}{286}$

28. 由洛必达法则

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\int_1^x\left(\int_t^1 e^{-u^2}du\right)dt}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\int_x^1 e^{-u^2}du}{2(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-e^{-x^2}}{2}$

$=-\dfrac{1}{2e}$.

注:要使用洛必达法则必须检验定理的条件是否满足,由于$\lim\limits_{x\to 1}(x-1)^2=0$,$\lim\limits_{x\to 1}\int_1^x\left(\int_t^1 e^{-u^2}du\right)dt=0$,因此可使用洛必达法则.

全真模拟(四)

一、选择题

1.【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了无穷小量的知识点.

【应试指导】 由$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$,$\lim\limits_{x\to 0}(2^{-x}-2)=-1$,

故由无穷小量知应选 D. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{\sqrt{x^4+1}}=1$,

$\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\sin\dfrac{1}{x}=0$.

2.【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了函数的连续性的知识点.

【应试指导】 因 $x=1$ 处 $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x-1)=0$,

$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}2x=2$,

所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处不连续,因此 $f(x)$ 的连续区间为$[0,1)\cup(1,3]$.

3.【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了函数的单调增加性的知识点.

【应试指导】 由 $y'=2ax$,若 y 在$(0,+\infty)$上单调增加,则应有 $y'>0$,即 $a>0$,且对 c 没有其他要求,故选 B.

4.【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了曲线上一点处的切线方程的知识点.

【应试指导】 因 $y=x^4-3$,所以 $y'=4x^3$,于是曲线在点$(1,-2)$处的切线的斜率

$k=y'\Big|_{x=1}=4$,从而得切线方程:$y+2=4(x-1)$,即 $4x-y-6=0$.

5.【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了不定积分的知识点.

【应试指导】 $\int\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}+1\right)d\sin x=-\dfrac{1}{\sin x}+\sin x+C$,故选 A.

6.【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了二元函数的一阶偏导数的知识点.

【应试指导】 因 $z=(3x^2+y^2)^{xy}$ 可看作是 $z=u^v$,$u=3x^2+y^2$,$v=xy$ 复合而成,

$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}$

$= v \cdot u^{v-1} \cdot 6x + u^{v} \cdot \ln u \cdot y$

$= xy \cdot (3x^2+y^2)^{xy-1} \cdot 6x + (3x^2+y^2)^{xy} \cdot \ln(3x^2+y^2) \cdot y$

$= y \cdot (3x^2+y^2)^{xy-1} \cdot [(3x^2+y^2)\ln(3x^2+y^2) + 6x^2]$.

7.【答案】C

【考情点拨】本题考查了极限的知识点.

【应试指导】$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=2$.

8.【答案】B

【考情点拨】本题考查了函数的驻点、极值点的知识点.

【应试指导】因 $z=xy$,于是 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=y,\dfrac{\partial z}{\partial y}=x$;令 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=0$,且 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$,得驻点$(0,0)$;

又 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0,\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=1,\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$,从而 $B^2-AC=1>0$,故点$(0,0)$不是极值点.

9.【答案】B

【考情点拨】本题考查了曲线围成的面积的知识点.

【应试指导】由题意知,所求面积 $A=\int_0^1(e^x-1)dx=e-2$.

10.【答案】B

【考情点拨】本题考查了全概率的知识点.

【应试指导】设 $A_i=\{$挑出的是第 i 箱$\}$,$i=1,2$;$B=\{$取出的是一等品$\}$.

由题意知,$P(A_1)=P(A_2)=\dfrac{1}{2}$,$P(B\mid A_1)=\dfrac{10}{50}=\dfrac{1}{5}$,

$P(B\mid A_2)=\dfrac{18}{30}=\dfrac{3}{5}$.

由全概率公式知:

$P(B)=P(A_1)\cdot P(B\mid A_1)+P(A_2)P(B\mid A_2)$

$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{2}{5}$.

二、填空题

11.【答案】$\dfrac{1}{3}$

【考情点拨】本题考查了极限的知识点.

【应试指导】$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+3x+1}{3x^2+x+2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{3+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}=\dfrac{1}{3}$.

12.【答案】5

【考情点拨】本题考查了一元函数在一点处的一阶导数的知识点.

【应试指导】由 $f(x)=x^3-2x^2+5x+1$,则 $f'(x)=3x^2-4x+5$,

故 $f'(0)=5$.

13.【答案】$-2e^x\sin x$

【考情点拨】本题考查了一元函数的二阶导数的知识点.

【应试指导】由 $y=e^x\cos x$,则 $y'=e^x\cos x-e^x\sin x$,

$y''=e^x\cos x-e^x\sin x-e^x\sin x-e^x\cos x$

$=-2e^x\sin x$.

14.【答案】$-\sin\dfrac{1}{x}+C$

【考情点拨】本题考查了不定积分的换元积分法的知识点.

【应试指导】$\int\dfrac{1}{x^2}\cos\dfrac{1}{x}dx$

$=-\int\cos\dfrac{1}{x}d\left(\dfrac{1}{x}\right)$

$\xlongequal{令\frac{1}{x}=u}-\sin u+C=-\sin\dfrac{1}{x}+C$.

15.【答案】e^{-2}

【考情点拨】本题考查了 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$ 的应用的知识点.

【应试指导】$\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{2}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{-\frac{1}{x}\cdot(-2)}$

$=\lim\limits_{x\to 0}[(1-x)^{-\frac{1}{x}}]^{-2}$

$=e^{-2}$.

16.【答案】$\dfrac{y}{e^y-x}$

【考情点拨】本题考查了隐函数的一阶导数的知识点.

【应试指导】在 $e^y=xy$ 两边对 x 求导(注意 y 是 x 的函数),有 $e^y\cdot y'=y+xy'$,

所以 $y'=\dfrac{y}{e^y-x}$.

17.【答案】$-\dfrac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}+C$

【考情点拨】本题考查了不定积分的换元积分法的知识点.

【应试指导】$\int x\sqrt{1-x^2}dx$

$=\dfrac{1}{2}\int\sqrt{1-x^2}dx^2$

$=\dfrac{1}{2}\int-(\sqrt{1-x^2})d(1-x^2)$

$=\left(-\dfrac{1}{2}\right)\times\dfrac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}+C$

$=-\dfrac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}+C$.

18.【答案】$-\dfrac{1}{2}\ln 3$

【考情点拨】本题考查了简单有理函数的积分的知识点.

【应试指导】$\int_0^2\dfrac{1}{x^2-4x+3}dx$

$=\int_0^2\dfrac{1}{(x-1)(x-3)}dx$

$=\dfrac{1}{2}\int_0^2\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{1}{x-1}\right)dx$

$=\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-3}{x-1}\right|\Bigg|_0^2$

$=-\dfrac{1}{2}\ln 3$.

19.【答案】$y^3dx+3xy^2dy$

【考情点拨】本题考查了复合函数的全微分的知识点.

【应试指导】因 $z=u^2\ln v$,$u=\dfrac{y}{x}$,$v=e^{x^3y}$,所以

$z=\dfrac{y^2}{x^2}\cdot x^3y=xy^3$,于是

$dz=\dfrac{\partial z}{\partial x}dx+\dfrac{\partial z}{\partial y}dy=y^3dx+3xy^2dy$.

20.【答案】$\dfrac{xy}{\sqrt{x(x+y^2)}}$

【考情点拨】本题考查了二元函数的一阶偏导数的知识点.

【应试指导】$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{2\sqrt{x(x+y^2)}}\cdot x\cdot 2y=\dfrac{xy}{\sqrt{x(x+y^2)}}$.

三、解答题

21. $dy=\left[6x^2\arccos x+2x^3\left(-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)+2x\sqrt{1-x^2}+(x^2-2)\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\right]dx$

$=\left[6x^2\arccos x-\dfrac{2x^3}{\sqrt{1-x^2}}+2x\sqrt{1-x^2}-\dfrac{x(x^2-2)}{\sqrt{1-x^2}}\right]dx$

$=\left(6x^2\arccos x-\dfrac{5x^3-4x}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$.

22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x\frac{\sin t^2}{t}dt}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\sin x^2}{x}}{2x}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^2}{x^2}=\dfrac{1}{2}$.

23. $\int x^2e^xdx=\int x^2de^x$

$=x^2e^x-2\int xe^xdx$

$=x^2e^x-2\int xde^x$

$=x^2e^x-2xe^x+2e^x+C$.

24. $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\dfrac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx=2\int_0^{\frac{1}{2}}\dfrac{x\cdot\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ (被积函数为偶函数)

$=-2\int_0^{\frac{1}{2}}\arcsin x\,d\sqrt{1-x^2}$

$=-2(\sqrt{1-x^2}\cdot\arcsin x)\Big|_0^{\frac{1}{2}}+2\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-x^2}\,d\arcsin x$

$=-\dfrac{\sqrt{3}}{6}\pi+2\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-x^2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$=-\dfrac{\sqrt{3}}{6}\pi+1=1-\dfrac{\sqrt{3}}{6}\pi$.

25. $\dfrac{\partial f(e^{xy})}{\partial x}=f'(e^{xy})\cdot e^{xy}\cdot y$,

$\dfrac{\partial^2 f(e^{xy})}{\partial x^2}=[f''(e^{xy})\cdot e^{xy}\cdot y]\cdot e^{xy}y+yf'(e^{xy})\cdot e^{xy}\cdot y$

$=y^2e^{xy}[f''(e^{xy})e^{xy}+f'(e^{xy})]$.

26. $y=ax^3+bx^2+cx$,$y'=3ax^2+2bx+c$,$y''=6ax+2b$,

由已知条件得

$2=a+b+c$, (曲线过$(1,2)$点)

$3a+2b+c=0$, (在$(1,2)$点 $y'=0$)

$2b=0$, (原点为拐点)

故 $b=0,a=-1,c=3$,此曲线的方程为 $y=-x^3+3x$.

27. 依题意,X 的可能取值为 $0,1,2$.

$P\{X=0\}=\dfrac{C_4^3}{C_6^3}=0.2$;$P\{X=1\}=\dfrac{C_2^1\cdot C_4^2}{C_6^3}=0.6$;

$P\{X=2\}=\dfrac{C_2^2\cdot C_4^1}{C_6^3}=0.2$,

所以 X 的概率分布为

X	0	1	2
P	0.2	0.6	0.2

28. 设 $\int_1^e f(x)dx=c$,则 $f(x)=\ln x-c$,

故 $c=\int_1^e(\ln x-c)dx=\int_1^e\ln xdx-c(e-1)$

$=(x\cdot\ln x)\Big|_1^e-\int_1^e x\cdot\dfrac{1}{x}dx-c(e-1)$

$=e-(e-1)-c(e-1)$

$=1-c(e-1)$,

所以 $c=\dfrac{1}{e}$,故 $\int_1^e f(x)dx=\dfrac{1}{e}$.

全真模拟(五)

一、选择题

1.【答案】C

【考情点拨】本题考查了函数在一点处连续的知识点.

【应试指导】$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处既左连续又右连续,所以

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}=2=f(0)=a$,故 $a=2$.

2.【答案】A

【考情点拨】本题考查了函数的单调性的知识点.

【应试指导】由 $y=x+\cos x$,所以 $y'=1-\sin x\geqslant 0(0<x<2\pi)$,故 y 在$(0,2\pi)$内单调增加.

3.【答案】B

【考情点拨】本题考查了定积分的换元积分法的知识点.

【应试指导】由$\int f(x)\mathrm{d}x = x^2 + C$,知

$\int f(-\sin x)\cos x\mathrm{d}x = \int f(-\sin x)\mathrm{d}\sin x$

$= -\int f(-\sin x)\mathrm{d}(-\sin x) = -(-\sin x)^2 + C$

$= -\sin^2 x + C$,

所以$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(-\sin x)\cos x\mathrm{d}x = -\sin^2 x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -1$.

4.【答案】B

【考情点拨】本题考查了不定积分的知识点.

【应试指导】由$\int f'(x)\mathrm{d}x = \int g'(x)\mathrm{d}x$,得$\int[f'(x)-g'(x)]\mathrm{d}x = 0$,即$f'(x)-g'(x)=0$,又$\int[f'(x)-g'(x)]\mathrm{d}x=\int 0\mathrm{d}x=0$,故$f(x)-g(x)-C=0$,所以$f(x)-g(x)=C$.

5.【答案】D

【考情点拨】本题考查了导数的定义的知识点.

【应试指导】$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+2h)-f(x_0)}{h}=1$与$f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$相比较,可得

$f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+2h)-f(x_0)}{2h}$

$=\frac{1}{2}\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+2h)-f(x_0)}{h}=\frac{1}{2}$.

注:令$2h=t$,由$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+2h)-f(x_0)}{h}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{\frac{1}{2}t}=1$,也可得由$f'(x_0)=\lim\limits_{t\to 0}\frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t}=\frac{1}{2}$.

6.【答案】C

【考情点拨】本题考查了变上限积分求导的知识点.

【应试指导】$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{x^2}\sin t^2\mathrm{d}t = \sin(x^2)^2\cdot(x^2)' = 2x\sin x^4$.

7.【答案】C

【考情点拨】本题考查了无穷小量阶的比较的知识点.

【应试指导】由$\lim\limits_{x\to 1}\frac{\frac{1-x}{1+x}}{1-\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{1+\sqrt{x}}{1+x}=1$,所以当$x\to 1$时,$\frac{1-x}{1+x}$与$1-\sqrt{x}$是等价无穷小.

8.【答案】A

【考情点拨】本题考查了曲线上一点处的切线方程的知识点.

【应试指导】由$ye^x+\ln y=1$,两边对x求导得$y'e^x+ye^x+\frac{1}{y}\cdot y'=0$,即$y'=\frac{-ye^x}{e^x+\frac{1}{y}}$,所以$y'\Big|_{(0,1)}=-\frac{1}{2}$,故切线方程为$y-1=-\frac{x}{2}$.

9.【答案】B

【考情点拨】本题考查了曲线的凸区间的知识点.

【应试指导】$y=3x^2-x^3$,$y'=6x-3x^2$,$y''=6-6x=6(1-x)$,显然当$x>1$时,$y''<0$;而当$x<1$时,$y''>0$.故在$(1,+\infty)$内曲线为凸弧.

10.【答案】B

【考情点拨】本题考查了事件的关系的知识点.

【应试指导】$AB=A$,则$A\subset AB$($AB\subset A$,按积的定义是当然的),即当$\omega\in A$时,必有$\omega\in AB$,因而$\omega\in B$,故$A\subset B$.

二、填空题

11.【答案】e^2

【考情点拨】本题考查了$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$的应用的知识点.

【应试指导】$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x^2}}{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{x^2}}=\frac{e}{e^{-1}}=e^2$.

本题还可如下解出:

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x^2-1}\right)^{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x^2-1}\right)^{x^2-1}\cdot\left(1+\frac{2}{x^2-1}\right)$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left[1+\frac{1}{\frac{x^2-1}{2}}\right]^{\frac{x^2-1}{2}\cdot 2}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x^2-1}\right)=e^2$.

12.【答案】1

【考情点拨】本题考查了极限的知识点.

【应试指导】$\lim\limits_{t\to 1}\frac{t-\sqrt{t}}{\sqrt{t}-1}=\lim\limits_{t\to 1}\frac{\sqrt{t}(\sqrt{t}-1)}{\sqrt{t}-1}=1$.

注:本题也可用洛必达法则计算.

13.【答案】$-\frac{1}{(\cos x+\sin x)^2}$

【考情点拨】本题考查了一元函数的一阶导数的知识点.

【应试指导】$y=\frac{1}{1+\tan x}$,则$y'=\frac{-\sec^2 x}{(1+\tan x)^2}=\frac{-\sec^2 x}{\frac{(\cos x+\sin x)^2}{\cos^2 x}}=-\frac{1}{(\cos x+\sin x)^2}$.

14.【答案】$-\sin x$

【考情点拨】本题考查了一元函数的高阶导数的知识点.

【应试指导】由$y=\sin x$,且$y^{(n)}=\sin\left(n\cdot\frac{\pi}{2}+x\right)$,则$y^{(10)}=\sin\left(10\times\frac{\pi}{2}+x\right)=\sin(5\pi+x)=\sin(\pi+x)=-\sin x$.

15.【答案】$\frac{y+e^{y-x}}{e^{y-x}-x}\mathrm{d}x$

【考情点拨】本题考查了隐函数的微分的知识点.

【应试指导】方程$xy=e^{y-x}$两边对x求导,y为x的函数,有

$y+xy'=e^{y-x}\cdot(y'-1)$

解得$\mathrm{d}y=\frac{y+e^{y-x}}{e^{y-x}-x}\mathrm{d}x$.

16.【答案】$-\frac{4}{3}$

【考情点拨】本题考查了不定积分的知识点.

【应试指导】$\int k\tan 2x\mathrm{d}x=k\int\frac{\sin 2x}{\cos 2x}\mathrm{d}x$

$=\frac{k}{2}\int\frac{\sin 2x}{\cos 2x}\mathrm{d}(2x)$

$=\frac{-k}{2}\int\frac{\mathrm{d}\cos 2x}{\cos 2x}$

$=\frac{-k}{2}\cdot\ln|\cos 2x|+C$,

与$\frac{2}{3}\ln|\cos 2x|+C$比较,得$k=-\frac{4}{3}$.

17.【答案】$\frac{1}{8}$

【考情点拨】本题考查了无穷区间的反常积分的知识点.

【应试指导】$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^3}\mathrm{d}x$

$=\lim\limits_{a\to+\infty}\int_2^a\frac{1}{x^3}\mathrm{d}x$

$=\lim\limits_{a\to+\infty}\left[\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x^2}\Big|_2^a\right]$

$=\lim\limits_{a\to+\infty}\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a^2}\right)=\frac{1}{8}$.

18.【答案】$-\frac{1}{2(x+y)}\sqrt{\frac{y}{x}}$

【考情点拨】本题考查了二元函数的一阶偏导数的知识点.

【应试指导】$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+\frac{y}{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{y}{x}}}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)$

$=-\frac{1}{2(x+y)}\sqrt{\frac{y}{x}}$.

19.【答案】$-e^{\sin x}\cos x\sin y$

【考情点拨】本题考查了二元函数的混合偏导数的知识点.

【应试指导】由$z=e^{\sin x}\cos y$,则$\frac{\partial z}{\partial y}=-e^{\sin x}\sin y$,

$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=-e^{\sin x}\cos x\sin y$.

20.【答案】e^2

【考情点拨】本题考查了分部积分法的知识点.

【应试指导】$\int_e^{e^2}\ln x\mathrm{d}x=x\ln x\Big|_e^{e^2}-\int_e^{e^2}x\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x$

$=2e^2-e-x\Big|_e^{e^2}$

$=2e^2-e-e^2+e=e^2$.

三、解答题

21. 由$y=(\tan x)^{\frac{1}{x}}$,则$\ln y=\frac{1}{x}\ln\tan x$,两边对$x$求导有

$\frac{1}{y}y'=-\frac{1}{x^2}\ln\tan x+\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\tan x}\sec^2 x$,

所以$y'=(\tan x)^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{\sec^2 x}{\tan x}-\frac{1}{x^2}\ln\tan x\right)$,

故$\mathrm{d}y=(\tan x)^{\frac{1}{x}}\left(\frac{\sec^2 x}{x\tan x}-\frac{1}{x^2}\ln\tan x\right)\mathrm{d}x$.

22. 由$y=a\ln x+bx^2+3x$,则$y'=\frac{a}{x}+2bx+3$.

因为$x_1=1$,$x_2=2$是极值点,所以$y'|_{x=1}=0$,$y'|_{x=2}=0$,即

$\begin{cases}a+2b+3=0,\\ \frac{a}{2}+4b+3=0,\end{cases}$

解得$a=-2$,$b=-\frac{1}{2}$.

23. $\int\frac{e^{2x}}{1+e^x}\mathrm{d}x=\int\frac{e^x}{1+e^x}\mathrm{d}e^x=\int\frac{e^x+1-1}{1+e^x}\mathrm{d}e^x$

$=\int\left(1-\frac{1}{1+e^x}\right)\mathrm{d}e^x$

$=e^x-\ln(1+e^x)+C$.

另解,令$e^x=t$,则$x=\ln t$,$\mathrm{d}x=\frac{1}{t}\mathrm{d}t$,

$\int\frac{e^{2x}}{1+e^x}\mathrm{d}x=\int\frac{t^2}{(1+t)t}\mathrm{d}t=\int\frac{t}{1+t}\mathrm{d}t$

$=\int\frac{t+1-1}{1+t}\mathrm{d}t$

$=\int\left(1-\frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t$

$=t-\ln(1+t)+C$

$=e^x-\ln(1+e^x)+C$.

24. $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{x^2-y^2}\cdot 2x+\frac{1}{x^2-y^2}(-2y)\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{2x}{x^2-y^2}-\frac{2y\cdot e^x}{x^2-y^2}=\frac{2x-2e^{2x}}{x^2-e^{2x}}$.

25. 这次投篮的投中次数是随机变量,设其为X,它可能取的值为0,1,$X=0$表示投中0次,即投篮未中,$P\{X=0\}=1-0.3=0.7$;$X=1$表示投中一次,$P\{X=1\}=0.3$,故概率分布为

X	0	1
P	0.7	0.3

,

分布函数 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 0.7, & 0\leqslant x<1,\\ 0.7+0.3=1, & x\geqslant 1.\end{cases}$

26\. 令$\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t=c$,则由题设知 $f(x)=x+2c$,

所以 $c=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 (x+2c)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2\Big|_0^1+2c=\frac{1}{2}+2c$,

故 $c=-\frac{1}{2}$,因此 $f(x)=x-1$.

27\. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2} te^t\sin t\mathrm{d}t}{x^6}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2e^{x^2}\sin x^2\cdot 2x}{6x^5}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2e^{x^2}\sin x^2}{6x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}\cdot x^2}{3x^2}=\frac{1}{3}$.

28\. 由$\sqrt{3}\leqslant\sqrt{3+x}\leqslant 2\quad x\in[0,1]$,

则$\sqrt{3}\cdot x^n\leqslant\sqrt{3+x}\cdot x^n\leqslant 2x^n$.

所以$\sqrt{3}\int_0^1 x^n\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1\sqrt{3+x}\cdot x^n\mathrm{d}x\leqslant 2\int_0^1 x^n\mathrm{d}x$,

即$\sqrt{3}\,\frac{1}{n+1}\leqslant\int_0^1\sqrt{3+x}\cdot x^n\mathrm{d}x\leqslant 2\cdot\frac{1}{n+1}$.

则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3}}{n+1}\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\sqrt{3+x}\cdot x^n\mathrm{d}x\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n+1}$,

即 $0\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\sqrt{3+x}\cdot x^n\mathrm{d}x\leqslant 0$.

故由夹逼定理得$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 x^n\sqrt{3+x}\mathrm{d}x=0$.

全真模拟(六)

一、选择题

1.【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了不定积分的知识点.

【应试指导】 $\int\sin 2x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\sin 2x\mathrm{d}2x$

$=\frac{1}{2}(-\cos 2x)+C$.

2.【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了定积分的性质的知识点.

【应试指导】 记 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$,

则 $F(-x)=\int_0^{-x}f(t)\mathrm{d}t\overset{t=-u}{=\!=\!=}\int_0^x f(-u)(-\mathrm{d}u)$(因 $f(x)$ 为偶函数,故 $f(x)=f(-x)$)

$=-\int_0^x f(u)\mathrm{d}u=-F(x)$,

所以 $F(x)$ 是奇函数.

3.【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了无穷小量的知识点.

【应试指导】 因$\lim\limits_{x\to 0}e^{-x}=1,\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=0,\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}=+\infty$,

故$\lim\limits_{x\to\infty}e^{-x}$ 不存在,应选 C.

4.【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了极限的知识点.

【应试指导】 从左右极限存在,可推出 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,但不能推出其他几个结论,故选 D.

5.【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了一元函数的一阶导数的知识点.

【应试指导】 因 $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{1}{x\sqrt{x}}=x^{-\frac{2}{3}}-x^{-\frac{3}{2}}$,

所以 $f'(x)=-\frac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}}+\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}$,

故 $f'(1)=-\frac{2}{3}+\frac{3}{2}=\frac{5}{6}$.

6.【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$的应用的知识点.

【应试指导】 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{2}$.

7.【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了函数的极值的知识点.

【应试指导】 $f(x)=(x^2-1)^3+1$,则 $f'(x)=6x(x^2-1)^2$,令 $f'(x)=0$,得驻点 $x_1=-1$,$x_2=0,x_3=1$,当 $0<x<1$ 时,$f'(x)>0$,当 $x>1$ 时,$f'(x)>0$,故 $f(x)$ 在 $x_3=1$ 处不取极值.

8.【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了曲线的拐点的知识点.

【应试指导】 $y=2+(x-4)^{\frac{1}{3}}$,$y'=\frac{1}{3}(x-4)^{-\frac{2}{3}}$,$y''=-\frac{2}{9}(x-4)^{-\frac{5}{3}}$,函数在 $x=4$ 处连续,当 $x<4$ 时,$y''>0$;当 $x>4$ 时,$y''<0$,所以点(4,2)为曲线的拐点.

9.【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了分部积分法的知识点.

【应试指导】 $\int_1^e x\ln x\mathrm{d}x$

$=\frac{1}{2}\int_1^e\ln x\mathrm{d}x^2$

$=\frac{1}{2}\left(x^2\ln x\Big|_1^e-\int_1^e x^2\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x\right)$

$=\frac{1}{2}\left(e^2-\frac{1}{2}x^2\Big|_1^e\right)=\frac{1}{4}(e^2+1)$.

10.【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了数学期望的知识点.

【应试指导】 由题意知,$E(X)=0\times 0.5+1\times 0.5=0.5$.

二、填空题

11.【答案】 $\frac{5}{2}$

【考情点拨】 本题考查了等价无穷小代换的知识点.

【应试指导】 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\tan 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\sin 5x}{5x}}{\frac{\tan 2x}{2x}}\cdot\frac{5x}{2x}=\frac{5}{2}$.

注:用洛必达法则也可解出.但最简便的方法是用等价无穷小代换.

12.【答案】 1

【考情点拨】 本题考查了函数可导的定义的知识点.

【应试指导】 $f(x)$ 在 x_0 可导,则 $f(x)$ 在 x_0 处连续,因此 $f(x)$ 在 x_0 处左连续,于是,$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$,而 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=1$,故 $f(x_0)=1$.

13.【答案】 $\left(\frac{1}{2},-\frac{5}{4}\right)$

【考情点拨】 本题考查了曲线上一点处的切线的知识点.

【应试指导】 $y=x^2+x-2$,$y'=2x+1$,由导数的几何意义可知,若点 M 的坐标为 (x_0,y_0),则 $2x_0+1=2$,解得 $x_0=\frac{1}{2}$,$y_0=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}-2=-\frac{5}{4}$.

14.【答案】 $e^{\frac{1}{x}}(2x-1)-a^x\ln a$

【考情点拨】 本题考查了一元函数的一阶导数的知识点.

【应试指导】 $y'=2xe^{\frac{1}{x}}+x^2e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)-a^x\ln a$

$=e^{\frac{1}{x}}(2x-1)-a^x\ln a$.

15.【答案】 $\frac{1}{2}\arctan\frac{x+1}{2}+C$

【考情点拨】 本题考查了不定积分的知识点.

【应试指导】 $\int\frac{1}{x^2+2x+5}\mathrm{d}x$

$=\int\frac{1}{x^2+2x+1+4}\mathrm{d}x$

$=\int\frac{1}{(x+1)^2+4}\mathrm{d}x$.

$=\frac{1}{2}\arctan\frac{x+1}{2}+C$.

16.【答案】 $\frac{1}{2}$

【考情点拨】 本题考查了无穷区间的反常积分的知识点.

【应试指导】 $\int_0^{+\infty}\frac{x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$

$=\lim\limits_{a\to+\infty}\frac{1}{2}\int_0^a\frac{1}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}(x^2+1)$

$=\frac{1}{2}\lim\limits_{a\to+\infty}\left(-\frac{1}{1+x^2}\right)\Big|_0^a$

$=\frac{1}{2}\lim\limits_{a\to+\infty}\left(1-\frac{1}{1+a^2}\right)=\frac{1}{2}$.

注:根据本题结构特点,容易想到凑微分,$2x\mathrm{d}x=\mathrm{d}x^2=\mathrm{d}(x^2+1)$.

17.【答案】 -1

【考情点拨】 本题考查了定积分的性质的知识点.

【应试指导】 若 $f(x)$ 是奇函数,则$\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x=0$,

即$\int_{-1}^0 f(x)\mathrm{d}x+\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$,所以$\int_{-1}^0 f(x)\mathrm{d}x=-1$.

注:若 $f(x)$ 是偶函数,则$\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x=2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

18.【答案】 e^{-1}

【考情点拨】 本题考查了 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$ 的应用的知识点.

【应试指导】 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{-1}{1+x}\right)^{\frac{1+x}{-1}\cdot(-1)-\frac{1}{2}}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{-1}{1+x}\right)^{\frac{1+x}{-1}\cdot(-1)}\left(1+\frac{-1}{1+x}\right)^{-\frac{1}{2}}=e^{-1}$.

注:此题也可考虑取对数后,利用洛必达法则,但这样较繁.

19.【答案】 $\cos x\cos y(\sin x)^{\cos y-1}\mathrm{d}x-\sin y(\sin x)^{\cos y}\ln\sin x\mathrm{d}y$

【考情点拨】 本题考查了二元函数的全微分的知识点.

【应试指导】 由$\frac{\partial z}{\partial x}=\cos y\cdot(\sin x)^{\cos y-1}\cdot\cos x$,

$\frac{\partial z}{\partial y}=(\sin x)^{\cos y}\cdot\ln\sin x\cdot(-\sin y)$,

所以 $\mathrm{d}z=\cos x\cos y(\sin x)^{\cos y-1}\mathrm{d}x-\sin y(\sin x)^{\cos y}\ln\sin x\mathrm{d}y$.

20.【答案】 2

【考情点拨】 本题考查了二元函数的一阶偏导数的知识点.

【应试指导】 由$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{x^2+y^2}$,$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y}{x^2+y^2}$,

所以 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2x^2}{x^2+y^2}+\frac{2y^2}{x^2+y^2}=2$.

三、解答题

21\. 由 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{a(1-\cos 2x)}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{a\cdot 2\sin 2x}{2x}=2a$,

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{b\sin x+\int_0^x\cos t^2\mathrm{d}t}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}(b\cos x+\cos x^2)$

$=b+1$,

又因 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,则 $b+1=2a=4$,

解得 $a=2,b=3$.

22\. 因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x}=-\infty$,

所以 $x=0$ 是曲线的铅直渐近线,

又因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$，

所以 $y=0$ 是曲线的水平渐近线.

23. 因 $\frac{1}{\cos^2 x}dx=\sec^2 x\,dx=d\tan x$，

所以 $\int\frac{1}{\cos^2 x\sqrt{2+3\tan x}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{2+3\tan x}}d\tan x$

$=\frac{1}{3}\int\frac{1}{\sqrt{2+3\tan x}}d(2+3\tan x)$

$=\frac{2}{3}\sqrt{2+3\tan x}+C$.

24. 记 $F(x,y)=2x^3+3y^2$，则 $\frac{\partial F}{\partial x}=6x^2,\frac{\partial F}{\partial y}=6y$.

故 $\Delta z=F(x+\Delta x,y+\Delta y)-F(x,y)$

$=F(10.2,8.3)-F(10,8)$

$=2\,329.086-2\,192=137.086$.

又因 $\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{(10,8)}=600,\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{(10,8)}=48$，

所以 $dz\Big|_{(10,8)}=\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{(10,8)}\times0.2+\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{(10,8)}\times0.3=120+14.4=134.4$.

25. 需检修的车数为随机变量，设其为 X，依题意 $X\sim B\left(3,\frac{1}{5}\right)$，则 $P\{X=2\}=C_3^2\times\left(\frac{1}{5}\right)^2\times\left(1-\frac{1}{5}\right)^{3-2}=0.096$.

26. 方程两边对 x 求导得

$e^{xy}(y+xy')+\cos(x^2y)\cdot(2xy+x^2y')=y'$，

将 $x=0,y=1$ 代入得 $y'=1$，

所以点 $(0,1)$ 处的切线方程为 $y-1=x$，即 $y=x+1$.

注：本题不必把 y' 解出后，再求 $y'|_{x=0}$，那样太麻烦.

27. 令 $\sqrt{2x+1}=t$，则 $x=\frac{1}{2}(t^2-1)$，$dx=tdt$.

所以 $\int e^{\sqrt{2x+1}}dx=\int e^t\cdot tdt$

$=te^t-\int e^tdt=te^t-e^t+C$

$=e^{\sqrt{2x+1}}(\sqrt{2x+1}-1)+C$.

28. 令 $f(x)=2^x-x^2(x>4)$，则 $f'(x)=2^x\ln2-2x$，由于此式不便判定符号，故再求出 $f''(x)$.

又因 $f''(x)=2^x\ln^2 2-2>2^4\ln^2 2-2=2(2\ln4\cdot\ln4-1)>0$，所以 $f'(x)$ 单调增加，故 $f'(x)>f'(4)=2^4\ln2-8=8(2\ln2-1)=8(\ln4-1)>0$，得到 $f(x)$ 单调增加，故 $f(x)>f(4)$，即 $2^x-x^2>f(4)=2^4-4^2=0$，

因此 $2^x>x^2(x>4)$.

考前密押(一)

一、选择题

1.【答案】D

【考情点拨】本题考查了极限(洛必达法则)的知识点.

【应试指导】$\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^{x^2}\ln(1+t)dt}{x^4}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x^2)\cdot2x}{4x^3}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2\cdot2}{4x^2}$

$=\frac{1}{2}$.

2.【答案】C

【考情点拨】本题考查了微分的知识点.

【应试指导】根据微分的定义，当 $\Delta x\to0$ 时 α 是 Δx 的高阶无穷小.

3.【答案】B

【考情点拨】本题考查了一元函数的微分的知识点.

【应试指导】由 $y=x^x$，则 $\ln y=x\ln x$，两边对 x 求导得 $\frac{1}{y}y'=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=\ln x+1$，

所以 $y'=x^x(\ln x+1)$，故 $dy=x^x(\ln x+1)dx$.

4.【答案】A

【考情点拨】本题考查了曲线上一点处的法线方程的知识点.

【应试指导】$x^2+y^2=2x$，两边对 x 求导得 $2x+2yy'=2$，将 $(1,1)$ 代入得 $y'\big|_{(1,1)}=0$，即点 $(1,1)$ 处的切线平行于 x 轴，故点 $(1,1)$ 处的法线垂直于 x 轴，其方程应为 $x=1$.

5.【答案】B

【考情点拨】本题考查了常数的导数的知识点.

【应试指导】$f(x)=\ln2+e^3$，由于 $\ln2$ 和 e^3 均为常数，所以 $f'(x)=0$.

6.【答案】C

【考情点拨】本题考查了极限的知识点.

【应试指导】本题注意，变量是 n 而不是 x.

$\lim\limits_{n\to\infty}3^n\tan\frac{x}{3^n}=\lim\limits_{n\to\infty}x\cdot\frac{\tan\frac{x}{3^n}}{\frac{x}{3^n}}=x$.

7.【答案】A

【考情点拨】本题考查了函数在一点处连续的知识点.

【应试指导】$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处左连续、右连续，

$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{\ln(1+ax)}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{ax}{x}=a=f(0)=1$.

8.【答案】D

【考情点拨】本题考查了旋转体的体积的知识点.

【应试指导】$V=\pi\int_0^\pi\sin^2x\,dx$

$=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi(1-\cos2x)dx$

$=\frac{\pi}{2}\left(\int_0^\pi dx-\frac{1}{2}\int_0^\pi\cos2x\,d2x\right)$

$=\frac{\pi}{2}\left(x\Big|_0^\pi-\frac{1}{2}\sin2x\Big|_0^\pi\right)=\frac{\pi^2}{2}$.

9.【答案】C

【考情点拨】本题考查了极限的知识点.

【应试指导】本题需要注意的是在使用洛必达法则前，需先作等价无穷小替换，并注意只有处于因式地位的无穷小才能作等替换.

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-x}{x^2\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sec^2x-1}{3x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan^2x}{3x^2}=\frac{1}{3}$.

10.【答案】B

【考情点拨】本题考查了由分布函数求概率的知识点.

【应试指导】$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \frac{1}{3}, & 0\le x<1,\\ \frac{1}{2}, & 1\le x<2,\\ 1, & x\ge2,\end{cases}$ 因为

X 取值为 0,1,2，所以

$F(1)=P\{X\le1\}=P\{X=0\}+P\{X=1\}=\frac{1}{3}+P\{X=1\}=\frac{1}{2}$，

故 $P\{X=1\}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$.

二、填空题

11.【答案】$\frac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}$

【考情点拨】本题考查了复合函数求导的知识点.

【应试指导】$y=\sqrt{x+\sqrt{x}}$，由复合函数求导法则，

$y'=\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)=\frac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}$.

12.【答案】2^{2x}

【考情点拨】本题考查了一元函数的一阶导数的知识点.

【应试指导】因 $g'(x)=2x$，所以 $f[g'(x)]=f(2x)=2^{2x}$.

13.【答案】$8!x^{-9}$

【考情点拨】本题考查了一元函数的高阶导数的知识点.

【应试指导】$y'=\ln x+1,y''=\frac{1}{x},y'''=-x^{-2}$，

$y^{(4)}=(-1)(-2)x^{-3},\cdots,y^{(10)}=(-1)^8 8!x^{-9}=8!x^{-9}$.

注：$y=\ln x,y'=\frac{1}{x},\cdots,y''=(-1)x^{-2},\cdots,y^{(n)}=(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!x^{-n}$，

利用莱布尼茨公式：$(uv)^{(n)}=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^ku^{(n-k)}v^{(k)}$

令 $v=x,u=\ln x,(x\cdot\ln x)^{(10)}$

$=C_{10}^0x(\ln x)^{(10)}+C_{10}^1x'(\ln x)^{(9)}$

$=x\cdot(-1)^9 9!x^{-10}+10\cdot(-1)^8 8!x^{-9}$

$=(-1)^8 8!(-9+10)x^{-9}=8!x^{-9}$.

14.【答案】$\frac{1}{\ln5}(5-\sqrt{5})$

【考情点拨】本题考查了定积分的换元积分法的知识点.

【应试指导】$\int_1^2\frac{1}{x^2}5^{\frac{1}{x}}dx=\int_1^2(-5^{\frac{1}{x}})d\frac{1}{x}$

$=-\frac{1}{\ln5}\cdot5^{\frac{1}{x}}\Big|_1^2$

$=-\frac{1}{\ln5}\times(\sqrt{5}-5)$

$=\frac{5-\sqrt{5}}{\ln5}$.

15.【答案】$\frac{1}{4}e^{2x^2}+C$

【考情点拨】本题考查了不定积分的换元积分法的知识点.

【应试指导】$\int e^{2x^2+\ln x}dx=\int e^{2x^2}e^{\ln x}dx$

$=\int e^{2x^2}xdx$

$=\frac{1}{4}\int e^{2x^2}d2x^2$

$=\frac{1}{4}e^{2x^2}+C$.

16.【答案】$f_1\cdot y+f_2$

【考情点拨】本题考查了复合函数的一阶偏导数的知识点.

【应试指导】$z=f(xy,x+y)$，则 $\frac{\partial z}{\partial x}=f_1y+f_2$.

17.【答案】1

【考情点拨】本题考查了无穷区间的反常积分的知识点.

【应试指导】$\int_0^{+\infty}xe^{-x}dx=\lim\limits_{a\to+\infty}\int_0^a xe^{-x}dx$

$=-\lim\limits_{a\to+\infty}\int_0^a xde^{-x}$

$=\lim\limits_{a\to+\infty}\left(-xe^{-x}\Big|_0^a+\int_0^a e^{-x}dx\right)$

$=\lim\limits_{a\to+\infty}\left[-ae^{-a}+(-e^{-x})\Big|_0^a\right]$

$=\lim\limits_{a\to+\infty}(-ae^{-a}+1-e^{-a})=1$.

注：$\lim\limits_{a\to+\infty}\frac{a}{e^a}=0$ 可用洛必达法则求出.

18.【答案】$\frac{2x}{1+x^4}$

【考情点拨】本题考查了不定积分的知识点.

【应试指导】 $\int f(x)\mathrm{d}x=\arctan x^2+C$,两边求导有
$f(x)=\frac{1}{1+x^4}\cdot 2x=\frac{2x}{1+x^4}$.

19.【答案】 $\frac{2y(1+\ln x)}{y+1}$

【考情点拨】 本题考查了隐函数的一阶导数的知识点.

【应试指导】 由 $y+\ln y-2x\ln x=0$,两边对 x 求导有
$y'+\frac{1}{y}y'-2\ln x-2x\cdot\frac{1}{x}=0$,
即 $y'\left(1+\frac{1}{y}\right)=2(\ln x+1)$,
所以 $y'=\frac{2y(1+\ln x)}{y+1}$.

20.【答案】 $\frac{3xy}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}$

【考情点拨】 本题考查了二元函数的混合偏导数的知识点.

【应试指导】 由 $z=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$,则 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2x$,
即 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$,
故 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-x\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)(x^2+y^2)^{-\frac{5}{2}}\cdot 2y=\frac{3xy}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}$.

三、解答题

21. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{2-x}-\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)(\sqrt{2-x}+\sqrt{x})}{2-x-x}$
$=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)(\sqrt{2-x}+\sqrt{x})}{2(1-x)}$
$=-\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{2-x}+\sqrt{x}}{2}=-1$.

22. $\int\sin\left(\frac{1}{2}\ln x\right)\mathrm{d}x$
$=x\sin\left(\frac{1}{2}\ln x\right)-\int x\cdot\cos\left(\frac{1}{2}\ln x\right)\cdot\frac{1}{2x}\mathrm{d}x$
$=x\sin\left(\frac{1}{2}\ln x\right)-\frac{1}{2}\int\cos\left(\frac{1}{2}\ln x\right)\mathrm{d}x$
$=x\sin\left(\frac{1}{2}\ln x\right)-\frac{1}{2}x\cdot\cos\left(\frac{1}{2}\ln x\right)+\frac{1}{2}\cdot\int x\left[-\sin\left(\frac{1}{2}\ln x\right)\right]\frac{1}{2x}\mathrm{d}x$
$=x\sin\left(\frac{1}{2}\ln x\right)-\frac{1}{2}x\cos\left(\frac{1}{2}\ln x\right)-\frac{1}{4}\cdot\int\sin\left(\frac{1}{2}\ln x\right)\mathrm{d}x$,
所以 $\frac{5}{4}\int\sin\left(\frac{1}{2}\ln x\right)\mathrm{d}x$
$=x\sin\left(\frac{1}{2}\ln x\right)-\frac{1}{2}x\cos\left(\frac{1}{2}\ln x\right)$,
故 $\int\sin\left(\frac{1}{2}\ln x\right)\mathrm{d}x=\frac{4}{5}\left[x\sin\left(\frac{1}{2}\ln x\right)-\frac{1}{2}x\cos\left(\frac{1}{2}\ln x\right)\right]$.

23. 做变换 $x=2\sin t\left(0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$,则
$\int_1^{\sqrt{2}}\frac{1}{x^2\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{2\cos t\mathrm{d}t}{4\sin^2t\cdot 2\cos t}$
$=\frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sin^2t}\mathrm{d}t$
$=\frac{1}{4}(-\cot t)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}$
$=\frac{1}{4}(-1+\sqrt{3})=\frac{1}{4}(\sqrt{3}-1)$.

24. 由题知 $\frac{\partial z}{\partial x}=2x-y+9$,
$\frac{\partial z}{\partial y}=-x+2y-6$,令 $\frac{\partial z}{\partial x}=0,\frac{\partial z}{\partial y}=0$,
联立解出驻点为$(-4,1)$,
由 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2,\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-1$,
且在点$(-4,1)$处 $B^2-AC=1-4<0,\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}>0$,
故在点$(-4,1)$处函数 z 取得极小值 -1.

25. 用 $\overline{A},\overline{B},\overline{C}$ 分别表示 A、B、C 电池损坏,则所求概率为
$P(\overline{A}\,\overline{B}\cup\overline{C})=P(\overline{A}\,\overline{B})+P(\overline{C})-P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})$
$=P(\overline{A})P(\overline{B})+P(\overline{C})-P(\overline{A})P(\overline{B})P(\overline{C})$
$=0.2\times0.2+0.3-0.2\times0.2\times0.3$
$=0.328$.

26. 由 $y'=\frac{-2x}{(1+x^2)^2},y''=\frac{-2+6x^2}{(1+x^2)^3}$,令 $y'=0$,有 $x=0$,令 $y''=0$,有
$x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$.(如下表所示)

x	$\left(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},0\right)$	0	$\left(0,\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$
y'	+		+	0	−		−
y''	+	0	−		−	0	+
y	↗凹		↗凸		↘凸		↘凹

所以函数 y 的单调增区间为$(-\infty,0)$,单调减区间为$(0,+\infty)$;而函数 y 的凸区间为$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$,凹区间为$\left(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$和$\left(\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$.

又因 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{1+x^2}=0$,所以函数有水平渐近线 $y=0$,但函数无铅直渐近线.

27. 由 $\int xf(x)\mathrm{d}x=\arcsin x+C$,两边对 x 求导有
$$xf(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$
所以 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\frac{1}{x}$,故 $\frac{1}{f(x)}=x\sqrt{1-x^2}$.
两边积分得 $\int\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x=\int x\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$
$=-\frac{1}{2}\int\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}(1-x^2)$
$=-\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}+C$
$=-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}+C$.

28. 由 $xy=xf(z)+y\varphi(z)$,两边对 x 求偏导有
$$y=f(z)+xf'(z)\frac{\partial z}{\partial x}+y\varphi'(z)\frac{\partial z}{\partial x},$$
所以 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y-f(z)}{xf'(z)+y\varphi'(z)}$,
同理 $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x-\varphi(z)}{xf'(z)+y\varphi'(z)}$,
故 $[x-\varphi(z)]\frac{\partial z}{\partial x}=[y-f(z)]\frac{\partial z}{\partial y}$.

考前密押(二)

一、选择题

1.【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了极限的知识点.

【应试指导】 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\mathrm{e}^x-1}\right)$
$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1-x}{x(\mathrm{e}^x-1)}$
$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x-1}$
$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x}$
$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2+x}=\frac{1}{2}$.

2.【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了二元函数的全微分的知识点.

【应试指导】 由 $z=\ln(x+y^2)$,得 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{x+y^2},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y}{x+y^2}$,
故 $\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1,1)}=\frac{1}{2},\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(1,1)}=1$,所以 $\mathrm{d}z\Big|_{(1,1)}=\frac{1}{2}\mathrm{d}x+\mathrm{d}y$.

3.【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了函数的连续性的知识点.

【应试指导】 关键是确定 $x=0$ 处 $f(x)$ 的连续性,
由 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x^2+1)=1$,
$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(2x-1)=-1$,
所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续,故应选 B.

4.【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了一元函数的高阶导数的知识点.

【应试指导】 由 $y=x^n$,则 $y^{(k)}=n(n-1)\cdots(n-k+1)\cdot x^{n-k}$,
所以 $y^{(n)}=n!$.

5.【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了函数的单调增加区间的知识点.

【应试指导】 由 $f(x)=x^2-x$,则 $f'(x)=2x-1$,若 $f'(x)>0$ 即
$x>\frac{1}{2}$,所以 $f(x)$ 的单调增加区间为 $x\geqslant\frac{1}{2}$.

6.【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了函数的最大值的知识点.

【应试指导】 由 $y=x+\sqrt{x}$,得 $y'=1+\frac{1}{2\sqrt{x}}$,又因 $x\in(0,4)$,故 $y'>0$. 而 $y=x+\sqrt{x}$ 在 $x=0,x=4$ 连续,所以 y 在$[0,4]$上单调增加. 故最大值为 $y\Big|_{x=4}=4+\sqrt{4}=6$.

7.【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了曲线的凹区间的知识点.

【应试指导】 由 $y=x\arctan x$,得 $y'=\arctan x+\frac{x}{1+x^2}$,
$y''=\frac{1}{1+x^2}+\frac{1+x^2-x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}=\frac{2}{(1+x^2)^2}$,显然 $y''>0$. 所以曲线在整个数轴上都是凹弧.

8.【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了导数定义的应用的知识点.

【应试指导】 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}$
$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)-[f(x_0-\Delta x)-f(x_0)]}{\Delta x}$
$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}+\lim\limits_{-\Delta x\to 0}\frac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{-\Delta x}$
$=f'(x_0)+f'(x_0)=2f'(x_0)$.

9.【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了函数的极值点的知识点.

【应试指导】 由 $f(x)=x-\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$，得 $f'(x)=1-x^{-\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x}}$，

令 $y'=0$，得驻点为 $x=1$，且不可导点为 $x=0$.

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	+		−		+
y	↗		↘		↗

由表可得极值点有两个.

10.【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了分布函数的知识点.

【应试指导】 选项 A、B、C 中 $F(x)$ 都符合分布函数的性质.而选项 D 中 $F(x)$，不满足 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$.

二、填空题

11.【答案】 e

【考情点拨】 本题考查了 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$ 的应用的知识点.

【应试指导】 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^x=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{2x}\right)^x}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^x}$

$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{2x}\right)^{\frac{2x}{3}\cdot\frac{3}{2}}}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x\cdot\frac{1}{2}}}=\frac{\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}}{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}}=\mathrm{e}.$

注：本题可另解如下：

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{2x+1}\right)^x$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left[1+\frac{1}{\frac{2x+1}{2}}\right]^{x+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left[1+\frac{1}{x+\frac{1}{2}}\right]^{x+\frac{1}{2}}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\left[1+\frac{1}{x+\frac{1}{2}}\right]^{-\frac{1}{2}}=\mathrm{e}.$

12.【答案】 不存在

【考情点拨】 本题考查了极限的知识点.

【应试指导】 由 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sin x}{x}=1$，

$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{\sin x}{-x}=-1$，

所以 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 不存在.

注：对分段函数在分段点处求极限总是要从求其左、右极限入手进行讨论，若左、右极限存在且相等，则所求极限存在，否则所求极限不存在.

13.【答案】 $y-\frac{1}{2}=-\sqrt{3}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$

【考情点拨】 本题考查了由线上一点处的切线方程的知识点.

【应试指导】 由 $y=\cos2x$，得 $y'=-2\sin2x$，则 $y'\Big|_{x=\frac{\pi}{6}}=-\sqrt{3}$，

又因 $x=\frac{\pi}{6}$ 时，$y=\frac{1}{2}$，所以所求切线方程为 $y-\frac{1}{2}=-\sqrt{3}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$.

14.【答案】 $2xf'(x^2)$

【考情点拨】 本题考查了复合函数的一阶导数的知识点.

【应试指导】 $y=f(x^2)$，令 $u=x^2$，则 $y=f(u)$，由复合函数求导法则得

$$y'=f'(u)\cdot u'=f'(x^2)\cdot2x.$$

15.【答案】 $\frac{1}{2}$

【考情点拨】 本题考查了极限的知识点.

【应试指导】 $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2}{x^2}=\frac{1}{2}\cdot\lim\limits_{x\to0}\frac{\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}.$

注：$x\to0$ 时，$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$，用等价无穷小代换更易求出结果.

16.【答案】 $\mathrm{e}^x+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}+C$

【考情点拨】 本题考查了不定积分的知识点.

【应试指导】 $\int\mathrm{e}^x(1+\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x=\int(1+\mathrm{e}^x)\mathrm{d}\mathrm{e}^x=\int\mathrm{d}\mathrm{e}^x+\int\mathrm{e}^x\mathrm{d}\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^x+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}+C.$

注：另有解法如下：

$\int\mathrm{e}^x(1+\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x=\int\mathrm{e}^x\mathrm{d}x+\int\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}+C.$

17.【答案】 $\cos x+C$

【考情点拨】 本题考查了不定积分的知识点.

【应试指导】 由 $\int f(x)\mathrm{d}x=\sin x+C$，知 $f(x)=(\sin x)'=\cos x$.

所以 $f'(x)=-\sin x$，故 $\int f'(x)\mathrm{d}x=\int(-\sin x)\mathrm{d}x=\cos x+C$.

注：求出 $f(x)=\cos x$ 以后，由 $\int f'(x)\mathrm{d}x=f(x)+C=\cos x+C$ 也可得出结果.

18.【答案】 $\frac{1}{2}$

【考情点拨】 本题考查了无穷区间的反常积分的知识点.

【应试指导】 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(1+\ln x)^3}\mathrm{d}x$

$=\lim\limits_{a\to+\infty}\int_1^a\frac{1}{(1+\ln x)^3}\mathrm{d}(1+\ln x)$

$=\lim\limits_{a\to+\infty}\left[\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{(1+\ln x)^2}\Big|_1^a\right]$

$=\frac{1}{2}\lim\limits_{a\to+\infty}\left[1-\frac{1}{(1+\ln a)^2}\right]=\frac{1}{2}.$

注：$\int\frac{1}{u^3}\mathrm{d}u=-\frac{1}{2}u^{-2}+C$，$\lim\limits_{a\to+\infty}\frac{1}{(1+\ln a)^2}=0$.

19.【答案】 $12x^2y$

【考情点拨】 本题考查了二元函数的混合偏导数的知识点.

【应试指导】 由 $z=2x^3y^2$，则 $\frac{\partial z}{\partial x}=6x^2y^2$，$\frac{\partial^2z}{\partial x\partial y}=12x^2y$.

20.【答案】 $\frac{x+y}{x-y}$

【考情点拨】 本题考查了隐函数的一阶偏导数的知识点.

【应试指导】 由 $\arctan\frac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$，两边对 x 求导有

$\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{y'x-y}{x^2}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{2x+2yy'}{2\sqrt{x^2+y^2}}$，

整理得 $y'=\frac{x+y}{x-y}$.

三、解答题

21. 因在 $x=0$ 处，$f(0)=2$，且

$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(2-x)=2$，

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left[\frac{2}{x}\ln(1+x)\right]=2\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{1+x}}{1}=2$，

所以 $x=0$ 是连续点.

而在 $x=1$ 处，$f(1)=2\ln2$，

$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{2}{x}\ln(1+x)=2\ln2$，

$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\left[2+(x-1)\sin\frac{1}{x-1}\right]=2$.

所以 $x=1$ 是第一类跳跃间断点.

注：$\lim\limits_{x\to1^+}(x-1)\sin\frac{1}{x-1}\xlongequal{x-1=t}\lim\limits_{t\to0}t\sin\frac{1}{t}=0$（无穷小乘有界量仍为无穷小）.

22. ∵ $f(x)=\int_{x+1}^{x^2}\mathrm{e}^{2t}\mathrm{d}t=-\int_0^{x+1}\mathrm{e}^{2t}\mathrm{d}t+\int_0^{x^2}\mathrm{e}^{2t}\mathrm{d}t$，

∴ $f'(x)=2x\cdot\mathrm{e}^{2x^2}-\mathrm{e}^{2(x+1)}$.

23. 令 $\sqrt{\mathrm{e}^x-1}=t$，则 $\mathrm{e}^x=t^2+1$，即 $x=\ln(1+t^2)$，且 $\mathrm{d}x=\frac{2t}{1+t^2}\mathrm{d}t$，

所以 $\int\sqrt{\mathrm{e}^x-1}\mathrm{d}x=\int t\cdot\frac{2t}{1+t^2}\mathrm{d}t=2\int\frac{t^2+1-1}{1+t^2}\mathrm{d}t$

$=2\int\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t$

$=2(t-\arctan t)+C$

$=2(\sqrt{\mathrm{e}^x-1}-\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1})+C$

24. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}=f'(u)\cdot\left(y-\frac{y}{x^2}\right)$，

$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=f'(u)\cdot\left(x+\frac{1}{x}\right)$.

25. 设 $X=\{$取到的白球数$\}$，则 $X=0,1,2$. 故 X 的概率分布为

X	0	1	2
P	$\frac{4}{25}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{9}{25}$

则 $E(X)=0\times\frac{4}{25}+1\times\frac{12}{25}+2\times\frac{9}{25}=1.2$，

$E(X^2)=0\times\frac{4}{25}+1\times\frac{12}{25}+4\times\frac{9}{25}=1.92$，

$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=0.48$.

26. 由 $f(x,y)=4(x-y)-x^2-y^2$，

得 $\frac{\partial f}{\partial x}=4-2x$，$\frac{\partial f}{\partial y}=-4-2y$.

令 $\frac{\partial f}{\partial x}=0$，$\frac{\partial f}{\partial y}=0$，得驻点 $(2,-2)$.

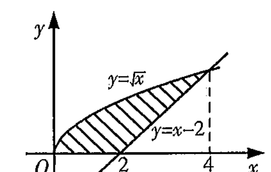
又因 $\frac{\partial^2f}{\partial x^2}=-2$，$\frac{\partial^2f}{\partial y^2}=-2$，$\frac{\partial^2f}{\partial x\partial y}=0$，

故在点 $(2,-2)$ 处 $B^2-AC=-4<0$，且 $\frac{\partial^2f}{\partial x^2}<0$，

$f(2,-2)=8$

所以 $f(x,y)$ 在点 $(2,-2)$ 处取极大值，极大值为 $f(2,-2)=8$.

27. 画出平面图形 D（如下图），



由图可知 $V=\pi\int_0^4x\mathrm{d}x-\frac{1}{3}\pi\times2^2\times2=\frac{16}{3}\pi$.

28. (1) 由题知 $F'(x)=f(x)+\frac{1}{f(x)}$，

因 $f(x)>0$，所以 $f(x)+\frac{1}{f(x)}>0$，

故 $F'(x)>0$.

(2) 由 $F'(x)>0$，知 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加，故 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 中最多有一个零点，即方程 $F(x)=0$ 最多有一个实根.

又因 $F(a)=-\int_a^b\frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t<0$，$F(b)=\int_a^bf(t)\mathrm{d}t>0$

故由零点定理知 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 内至少有一个零点，即至少有一个 $\xi\in(a,b)$ 使得 $F(\xi)=0$，这也说明方程 $F(x)=0$ 在 $[a,b]$ 内至少有一个实根.

综上所述，$F(x)=0$ 在 $[a,b]$ 内有唯一实根.